QUADERNI

Università degli Studi di Siena
DIPARTIMENTO DI ECONOMIA POLITICA

Fabio Petri

Una dimostrazione economicamente intuitiva del teorema di Okishio basata sulla nozione di "impresa composita"

n. 252 - Aprile 1999

1.

Questa nota presenta una nuova dimostrazione della tendenza della scelta delle tecniche a portare nel lungo periodo sull'inviluppo esterno delle cosiddette 'curve salario' o curve w(r), per il caso di produzione singola senza terra e senza merci di lusso (cioè senza prodotti che non entrino, direttamente o indirettamente, nel paniere in termini del quale viene misurato il salario reale)([1]). Questa dimostrazione mi sembra utile a fini didattici, in quanto facilmente visualizzabile in immagini di chiara interpretazione economica. Essa si basa sulla nozione di 'impresa composita', un complesso di sottoimprese che produce tutte le merci-salario e le merci direttamente o indirettamente necessarie alla produzione di queste, in proporzioni tali da riprodurre gli inputs materiali accresciuti di un saggio pari al dato saggio di profitto (per cui il capitale e il profitto su di esso sono ripagati in natura), e da avere il residuo consistente di panieri-salario.

La presente sezione chiarisce la terminologia e la simbologia adottate. La sezione 2 ricorda che la curva w(r) è anche interpretabile come curva c(g). La sezione 3 presenta la nuova dimostrazione, per il caso di tecniche con tutte le merci in comune. Le sezioni 4 e 5 estendono la dimostrazione al caso di una o più merci non in comune.

Considero l'economia di Sraffa con produzione singola e senza terra. Il metodo di produzione della merce i-esima è un vettore (a_{1i}, a_{2i},...,a_{ni}, L_i). Intendo per *tecnica* un insieme di metodi produttivi, uno per ciascun output, descritto da una matrice $A=(a_{ij})$ di

---

[1] . Le merci di lusso creano complicazioni se il loro saggio di autoriproduzione massimo è inferiore al saggio di profitto. Tali complicazioni motivano in gran parte la complessa trattazione di Kurz e Salvadori (1995, cap. 5: vedi i Riferimenti Bibliografici qui alla fine), ma io condivido lo scetticismo di Sraffa sulla rilevanza di tale eventualità.

coefficienti tecnici di inputs di merci (il primo indice indica l'input, il secondo l'industria) e da un vettore riga $L=(L_1,...,L_n)$ di coefficienti tecnici di inputs di lavoro. Assumo salari posticipati; i prezzi (di lungo periodo, i soli prezzi qui considerati) soddisfano l'equazione matriciale

$$p=(1+r)pA+wL.$$

Il saggio di profitto è dato. Supponiamo di confrontare due tecniche, entrambe *adottabili* (cioè che al dato saggio di profitto danno un saggio di salario non negativo), che differiscono per il metodo produttivo di una sola merce, la merce 1. Indico le due tecniche come α e β, e distinguo i loro coefficienti tecnici con α oppure β in apice. Supponiamo che sia vigente la tecnica α e che dunque i prezzi e il saggio di salario siano determinati, oltre che dall'equazione che fissa un numerario (diverso dalla merce 1, ad es. $p_n=1$) e dal dato livello del saggio di profitto, dall'equazione matriciale $p^{(\alpha)}=(1+r)p^{(\alpha)}A^{\alpha}+w^{(\alpha)}L^{\alpha}$. Il simbolo (α) in apice vuol dire "determinato sulla base dei prezzi della tecnica α". Verrà trovato più conveniente, a quei prezzi, adottare il metodo $\beta 1$ (il metodo per produrre la merce 1 nella tecnica β) se esso permette, pagando gli inputs ai prezzi $(p^{(\alpha)},w^{(\alpha)})$, di vendere la merce a un prezzo minore di $p_1^{(\alpha)}$, cioè se, con $p_1^{\beta(\alpha)}$ il prezzo d'offerta della merce 1 prodotta col metodo $\beta 1$ quando inputs e lavoro sono pagati ai prezzi e saggio di salario associati alla tecnica α, si ha:

$$p_1^{\beta(\alpha)} \equiv (1+r)\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{\beta}p_i^{(\alpha)}+w^{(\alpha)}L_1^{\beta} < p_1^{(\alpha)}.$$

Intendo dimostrare il Teorema 1: *se il saggio di profitto è dato (e non maggiore del maggiore tra i massimi saggi di profitto delle due tecniche), allora* $w^{(\alpha)} \gtreqless w^{(\beta)}$ *se e solo se* $p_1^{\beta(\alpha)} \gtreqless p_1^{(\alpha)}$.

La parte 'se' della tesi del Teorema è nota, soprattutto tra gli economisti marxisti, come 'teorema di Okishio' (v. i Riferimenti Bibliografici Commentati qui alla fine). Okishio (1961) in realtà dimostra che se *il saggio di salario fisico (un vettore)* è dato e anticipato (e incluso tra gli inputs nella matrice A), e se compare un nuovo metodo più conveniente, allora la nuova tecnica che lo include dà *un saggio di profitto* più elevato. Bowles (1981) ha fornito una dimostrazione molto semplice di tale risultato. Sia $p^{(\alpha)}=(1+r)p^{(\alpha)}A^{\alpha}$, dove A^{α} include tra gli inputs anche i salari fisicamente specificati. Viene scoperto un nuovo metodo β1 tale che $p_1^{\beta(\alpha)} \equiv (1+r)\sum_{i=1}^{n} a_{i1}^{\beta}p_i^{(\alpha)} < p_1^{(\alpha)}$. Si costruisca un metodo ipotetico $\beta1^{+}$, aumentando nella stessa proporzione tutti i coefficienti tecnici del metodo β1, e dunque anche il prezzo d'offerta del bene 1, fino a giungere a $p_1^{\beta+(\alpha)} = p_1^{(\alpha)}$. La tecnica $A^{\beta+}$, che ha il metodo ipotetico $\beta1^{+}$ al posto del metodo α1, dà lo stesso saggio di profitto della tecnica α e dunque ha lo stesso autovalore dominante λ* giacché qui $1+r=1/\lambda^*$. La tecnica A^{β} ha alcuni coefficienti più piccoli della tecnica $A^{\beta+}$, dunque per il teorema di Perron-Frobenius ha autovalore dominante minore, e dunque saggio di profitto maggiore.

Il 'teorema di Okishio' mostra anche che il metodo α1 scartato non verrà reintrodotto ai nuovi prezzi([2]); ma non basta a dimostrare la tendenza dell'economia all'inviluppo esterno delle curve w(r). Infatti non esclude la possibilità che un metodo che, se introdotto, darebbe un saggio di profitto più elevato, non venga introdotto perché ai vecchi prezzi non dà un prezzo d'offerta più basso. Da ciò l'utilità dell'includere nel Teorema 1 anche il converso del 'teorema di Okishio' e il caso di equiprofittabilità.

Seguendo Sraffa, assumo inoltre un saggio di salario posticipato, misurato in un qualche numerario, e tratto il saggio di profitto, e non il salario, come dato. Tuttavia i risultati sono facilmente traducibili da un caso all'altro; infatti data la continuità e decrescenza delle curve w(r), un cambiamento della curva w(r) rende più elevato il saggio di profitto a parità di saggio di salario posticipato se e solo se rende anche più elevato il saggio di salario posticipato a parità di saggio di profitto; e poiché il saggio di profitto

---

[2] . Per le leggi della logica il fatto, che se $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$ allora $r^{(\beta)}>r^{(\alpha)}$, implica che se *non* si ha $r^{(\beta)}>r^{(\alpha)}$, allora non può aversi $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$; scambiando di posto β e α in tale enunciato, si ottiene che se non si ha $r^{(\alpha)}>r^{(\beta)}$, allora non può aversi $p_1^{\alpha(\beta)}<p_1^{(\beta)}$.

resta lo stesso se al posto del saggio di salario posticipato si mette un saggio di salario anticipato pari a quello posticipato diviso per (1+r), a parità di saggio di profitto il cambiamento di curva w(r) innalza il salario posticipato se e solo se innalza anche il salario anticipato.

2.

Premessa della dimostrazione è il fatto noto che la curva w(r) associata a una tecnica può essere interpretata anche come la funzione c(g) che lega il consumo (consistente di unità del bene o paniere di beni adottato come numerario) per unità di lavoro al saggio di crescita uniforme. Ricordo la dimostrazione di ciò (chi la conosce può passare alla sezione 3). Supponiamo che l'economia voglia far crescere tutte le quantità prodotte al saggio g, e dedicare la parte del prodotto netto non necessaria per tale crescita a consumo di un bene o paniere di beni, che scegliamo come numerario. Il numerario è un vettore colonna di beni $v=(v_1,...,v_n)^T$. Siano x il vettore colonna delle quantità prodotte totali per periodo, y=x-Ax il vettore dei prodotti netti, c uno scalare. Se non vi sono sprechi si avrà y-gAx=cv, e cioè quella parte del prodotto netto che non viene utilizzata per accrescere lo stock di mezzi di produzione al saggio g consiste di unità di numerario. Dunque x=(1+g)Ax+cv, e cioè $x=[I-(1+g)A]^{-1}cv$, dove l'inversa è positiva purché g sia inferiore al massimo saggio di crescita possibile per questa economia, quello corrispondente a consumi zero e uguale a $(1-\lambda^*)/\lambda^*$ dove λ^* è l'autovalore dominante della matrice semipositiva A, minore di 1 se l'economia è vitale. Dunque un x tale da soddisfare x-(1+g)Ax=cv esiste ed è positivo.

Fissiamo le dimensioni dell'economia supponendo Lx=1 e cioè che l'occupazione totale è 1 unità di lavoro. Allora $1=Lx=L[I-(1+g)A]^{-1}cv=cL[I-(1+g)A]^{-1}v$.

Pertanto la curva c(g) è data da $c=1/\{L[I-(1+g)A]^{-1}v\}$.

Ricaviamo ora esplicitamente la curva w(r). Da p=(1+r)pA+wL e pv=1 discende, per $r<(1-\lambda^*)/\lambda^*$, che $p=wL[I-(1+r)A]^{-1}$, da cui, postmoltiplicando per v, si ottiene pv=1=

$=wL[I-(1+r)A]^{-1}v$. Per cui $w(r)$ è data da $w=1/\{L[I-(1+r)A]^{-1}v\}$.

Il che mostra che $w(r)$ e $c(g)$ sono la stessa funzione, se si assume che i consumi consistano di unità della stessa merce in cui si misura il saggio di salario. Pertanto, dato r, e fissato il numerario v come un paniere di composizione uguale a quella del consumo medio, il saggio di salario w è interpretabile come il numero di unità di numerario e cioè di consumo c per unità di lavoro impiegato, ottenibili se parte del prodotto netto va a aumentare i mezzi di produzione nella percentuale r. In altre parole, se $x=(1+r)Ax+cv$ con $Lx=1$, e se $p=(1+r)pA+wL$ con $pv=1$, allora $c=w$.

3.

Dimostriamo ora il Teorema 1. Supponiamo due metodi $\alpha 1$ e $\beta 1$ per la merce 1, tali che le tecniche α e β hanno tutte le merci in comune, e hanno in comune anche tutti i metodi per le merci diverse dalla 1. Il numerario, che è anche il paniere-salario, è un vettore semipositivo v. Il saggio di profitto r è dato.

Assumiamo che la tecnica α sia adottabile al dato r (cioè $w^{(\alpha)}(r)\geq 0$) e sia adottata.

Immaginiamo un'*impresa composita*, consistente di *sottoimprese*, una in ciascuna industria, producenti quantità tali che: i) l'insieme delle sottoimprese occupa complessivamente 1 unità di lavoro, ii) l'insieme delle sottoimprese produce complessivamente un vettore di outputs tale da permettere di ricostituire gli stocks di mezzi di produzione complessivamente impiegati, aumentati della percentuale r, e tale che il resto del prodotto netto complessivo consiste interamente di numerario (cioè di panieri-salario). Questa *impresa composita* esiste - per il teorema di Perron-Frobenius - purché al dato r sia $w(r)\geq 0$; e il numero c di unità di numerario che è in grado di produrre è dato da $c(r)$, funzione che coincide con la $c(g)$ vista alla sez. 2. Se esiste, l'impresa composita è in grado di ripagare *in termini fisici*, in natura, i beni capitali e i profitti su di essi al saggio r; supponiamo che effettivamente l'impresa composita, alla fine di ciascun ciclo produttivo, restituisca 1+r volte la quantità impiegata di ciascun mezzo di produzione; ciò mostra che essa farà o no extraprofitti a seconda che la quantità c di numerario, che le resta dopo tali pagamenti in natura, sia più o meno di quella che serve a pagare 1 salario.

Cominciamo dimostrando che se $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}\geq 0$ allora $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$. Consideriamo l'impresa composita adottante la tecnica β (che esiste giacché per ipotesi $w^{(\beta)}\geq 0$): essa produrrà $x_\beta=(1+r)A^\beta x_\beta+c_\beta v$, $L^\beta x_\beta=1$, e allora per ipotesi $c_\beta=w^{(\beta)}$. Pertanto, ripagati in natura i beni capitali usati come inputs e i profitti su di essi, e cioè restituite le quantità $(1+r)A^\beta x_\beta$, e inoltre pagato il salario $w^{(\alpha)}$, resta un extraprofitto o una "perdita" $w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}$.

Supponiamo che resti un extraprofitto, e cioè che sia $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$. Tale extraprofitto è realizzato interamente nella sottoimpresa che produce la merce 1, e cioè quella che adotta il metodo $\beta 1$. Infatti tutte le altre sottoimprese adottano gli stessi metodi che nella tecnica α e pertanto, ai prezzi e salario (α), fanno extraprofitti nulli. Dunque l'unica sottoimpresa che può avere un extraprofitto è quella che produce la merce 1; è così dimostrato che essa vende a un prezzo superiore al suo prezzo d'offerta $p_1^{\beta(\alpha)}$. Per via dei rendimenti costanti di scala, lo stesso vale per un'impresa di qualsiasi dimensione, che produca la merce 1 col metodo $\beta 1$. Abbiamo pertanto dimostrato che se $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}\geq 0$ allora $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$.

Analogamente si dimostra che se $w^{(\alpha)}>w^{(\beta)}\geq 0$, un imprenditore che avvii lo stesso tipo di impresa composita farà "perdite", e cioè non otterrà ricavi sufficienti a ripagare il saggio di profitto r sui beni capitali impiegati e a pagare inoltre il saggio di salario $w^{(\alpha)}$ all'unità di lavoro impiegata. ("Perdite" tra virgolette, perché si tratta di effettive perdite solo se il saggio di profitto è incluso tra i costi, ad es. perché il saggio di interesse è pari al saggio di profitto.) Infatti, ripagati in termini fisici i beni capitali impiegati e il saggio di profitto su di essi, all'imprenditore resterà una quantità di numerario pari a $w^{(\beta)}$ invece del $w^{(\alpha)}$ di cui avrebbe bisogno per finire in pareggio; e questa "perdita" pari a $w^{(\alpha)}-w^{(\beta)}$ sarà da attribuire all'impresa che produce la merce 1 perché tutte le altre imprese sono necessariamente in pareggio; il che dimostra che $p_1^{\beta(\alpha)}>p_1^{(\alpha)}$.

Se invece $w^{(\alpha)}>w^{(\beta)}$ ma $w^{(\beta)}<0$, allora la tecnica β non è adottabile, e non esiste impresa composita adottante β. In tal caso, consideriamo una diversa impresa composita, che adotti la tecnica β e produca il vettore di produzioni che massimizza il saggio di profitto che essa sarebbe in grado di ripagare in natura se il saggio di salario fosse zero: il prodotto di questa impresa composita è allora merce-tipo, per cui possiamo chiamarla impresa-tipo. Questo saggio di profitto massimo, coincidente col saggio di crescita massimo quando il salario è zero, può anche essere negativo (in tal caso la tecnica β non è 'viable'); in ogni caso è per ipotesi inferiore a r. Questa impresa-tipo è dunque necessariamente in perdita perché non può pagare il salario e inoltre, anche senza pagare il salario, può solo ripagare un saggio di profitto inferiore a r. Ma come prima, tutte le sue sottoimprese sono in pareggio tranne la sottoimpresa 1, e dunque la perdita si verifica interamente nella sottoimpresa 1; il che di nuovo dimostra che $p_1^{\beta(\alpha)}>p_1^{(\alpha)}$ e dunque che il metodo $\alpha 1$ è il più conveniente.

Dimostriamo ora che se $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$ allora $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$, supposto $w^{(\alpha)}\geq 0$. Dimostriamo in primo luogo che l'impresa composita adottante la tecnica β esiste e cioè che $w^{(\beta)}\geq 0$. Consideriamo (un po' come in Bowles) un ipotetico metodo $\beta 1^*$ ottenuto da $\beta 1$ aumentandone alcuni coefficienti di inputs (ad es. il solo coefficiente a_{11}) fino a ottenere $p_1^{\beta^*(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}$; la tecnica ipotetica β^* è in grado di pagare il salario $w^{(\alpha)}\geq 0$, dunque ha saggio di profitto massimo (associato al saggio di salario zero) $R_{\beta^*}\geq r$; per il teorema di Perron-Frobenius, tale saggio di profitto massimo aumenta al diminuire di ciascun coefficiente di A, dunque il saggio di profitto massimo R_β della tecnica β è maggiore di R_{β^*} per cui $R_\beta>r$ e dunque $w^{(\beta)}(r)>0$, dunque l'impresa composita adottante la tecnica β esiste. Ora, essendo $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$, in tale impresa composita ai prezzi $p^{(\alpha)}$, $w^{(\alpha)}$ la sottoimpresa che produce la merce 1 col metodo $\beta 1$ fa extraprofitti e le altre sottoimprese sono in pareggio, dunque l'impresa composita fa extraprofitti; poiché, dopo aver ripagato in termini fisici capitale e profitti, le resta solo una quantità di numerario, gli extraprofitti che le restano dopo aver pagato anche il salario $w^{(\alpha)}$ corrispondono a una quantità positiva di numerario: dunque $c_\beta>w^{(\alpha)}$; e poiché $c_\beta=w^{(\beta)}$, è $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$ come volevasi dimostrare.

Lo stesso tipo di ragionamento permette di dimostrare facilmente che, se e solo se al dato saggio di profitto si ha $w^{(\alpha)}=w^{(\beta)}$, allora $p_1^{\beta(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}$ e $p_1^{\alpha(\beta)}=p_1^{(\beta)}$ per cui $p_1^{(\alpha)}=p_1^{(\beta)}$, e viceversa. Infatti se $w^{(\alpha)}=w^{(\beta)}$, l'impresa composita adottante la tecnica β, che esiste e ai prezzi e salario (α) ha in pareggio tutte le sottoimprese diverse dalla 1, necessariamente ha in pareggio anche quest'ultima perché fa extraprofitti nulli, per cui $p_1^{\beta(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}$; e se $p_1^{\beta(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}$, allora la tecnica β ha saggio di profitto massimo non inferiore a r, dunque l'impresa composita adottante la tecnica β esiste e ha in pareggio tutte le sottoimprese per cui dev'essere $w^{(\alpha)}=w^{(\beta)}$.

Col che il Teorema 1 è dimostrato, per il caso di due tecniche che hanno tutte le merci in comune.

(Nel seguito assumerò che il saggio di salario di entrambe le tecniche sia non negativo e dunque che l'impresa composita esista.)

4.

Il ragionamento basato sull'impresa composita si estende senza problemi al caso in cui il metodo di produzione alternativo della merce 1 comporta l'introduzione di merci che non comparivano nella tecnica che determina i prezzi. Ad esempio se nella tecnica β la produzione della merce 1 richiede come input una merce n+1-esima che non viene prodotta nella tecnica α, allora, quando è la tecnica α che determina i prezzi ma l'impresa composita adotta la tecnica β, l'impresa composita includerà anche una sottoimpresa producente la merce n+1-esima, dunque la matrice A^{β} sarà di dimensione (n+1)x(n+1) e il vettore L^{β} avrà n+1 elementi, ma resterà vero che l'impresa composita produrrà un vettore x_β che soddisfi $x_\beta=(1+r)A^{\beta}x_\beta+c_\beta v$, $L^{\beta}x_\beta=1$, e resterà vero che essa farà extraprofitti positivi (di valore pari a $w^{(\beta)}-w^{(\alpha)}$) se e solo se $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$. Ciò che permette di raggiungere tale conclusione è che, *per stabilire se l'impresa composita fa o no extraprofitti, i prezzi dei prodotti sono irrilevanti*: l'impresa composita restituisce, di ogni merce impiegata come input, la quantità impiegata aumentata della percentuale r, e le resta la quantità di numerario $c_\beta = w^{(\beta)}$ da confrontarsi con la quantità di numerario rappresentata dal saggio di salario della tecnica che determina i prezzi, $w^{(\alpha)}$ nel nostro caso.

Sorge solo un grado di libertà quando si tratta di determinare la sottoimpresa, all'interno dell'impresa composita, a cui vanno attribuiti gli extraprofitti o le "perdite". Se ad es. vi sono extraprofitti, essi risulteranno ottenuti dalla sottoimpresa che produce la merce 1, se la merce n+1-esima viene comprata e venduta al suo prezzo d'offerta $p_{n+1}^{\beta(\alpha)}$ (cioè il prezzo a cui sarebbe venduta se fosse prodotta nell'economia ai prezzi e salario (α) come merce di lusso); definendo $p_1^{\beta(\alpha)}$ come il prezzo che permetterebbe alla sottoimpresa adottante il metodo $\beta 1$ di ottenere il saggio di profitto r se compra gli inputs ai prezzi e salario (α), incluso l'input della merce n+1-esima (che viene cioè comprata al prezzo $p_{n+1}^{\beta(\alpha)}$), è così dimostrato che se $w^{(\beta)} > w^{(\alpha)}$, allora $p_1^{\beta(\alpha)} < p_1^{(\alpha)}$. Se però il prezzo della merce n+1-esima viene innalzato rispetto a $p_{n+1}^{\beta(\alpha)}$, allora la sottoimpresa che la produce fa extraprofitti, mentre si riducono corrispondentemente gli extraprofitti della sottoimpresa producente la merce 1, il cui prezzo d'offerta si è innalzato; ed è possibile far risultare tutti gli extraprofitti come ottenuti dalla sottoimpresa che produce la merce n+1-esima, alzando il prezzo di quest'ultima merce fino a far coincidere il prezzo d'offerta della merce 1 con $p_1^{(\alpha)}$. Ciò dimostra che è possibile far sì che guadagnino extraprofitti entrambe le sottoimprese, e dunque che ai prezzi e salario (α) converrà introdurre il metodo ($\beta 1, \beta(n+1)$) anche se esso viene introdotto da imprese distinte, producenti alcune la merce n+1-esima, e altre la merce 1 col nuovo metodo.([3])

[3] . L'effettiva introduzione del metodo ($\beta 1, \beta(n+1)$) può incontrare la seguente difficoltà: se la produzione della merce n+1-esima richiede quella stessa merce come input, allora può essere impossibile avviarla se non esiste già merce n+1-esima; bisogna allora ipotizzare qualche altra tecnologia 'di transizione' che permetta di produrre la merce n+1-esima in un altro modo che non la richieda tra gli inputs, e che però non sia conveniente una volta che esistano stocks di quella merce utilizzabili come inputs. Non si può a priori escludere, sembrerebbe, la possibilità che i costi associati alla 'transizione' precludano l'introduzione di un metodo che, sulla base del confronto tra posizioni di lungo periodo, risulterebbe più conveniente; la tendenza nel lungo periodo all'inviluppo esterno delle curve w(r) richiede di escludere questa possibilità. Questa complicazione sorge potenzialmente tutte le volte che un nuovo metodo richiede l'uso di nuovi

Per dimostrare che se $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$, allora è $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$, basta ricordare la definizione appena data di $p_1^{\beta(\alpha)}$. Come nel caso con tutte le merci in comune discusso alla sez. 3, se $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$ nell'impresa composita vi sono extraprofitti perché la sottoimpresa 1 fa extraprofitti e tutte le altre sottoimprese sono in pareggio, e dunque $c_\beta=w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$.

Il ragionamento è ovviamente generalizzabile senza problemi al caso in cui il nuovo metodo β1 richieda più di una nuova merce. Resta infatti vero che i prezzi e saggio di salario $p^{(\alpha)}$, $w^{(\alpha)}$ permettono di determinare univocamente i prezzi di offerta di tutte queste nuove merci $p_{n+1}^{\beta(\alpha)}$, $p_{n+2}^{\beta(\alpha)}$, ..., (di nuovo, si può immaginare che tali merci fossero già prodotte come merci di lusso nell'economia adottante la tecnica α)([4]), e pertanto anche $p_1^{\beta(\alpha)}$; e non vi sono pertanto difficoltà a dedurre che, se $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$, allora l'impresa composita fa extraprofitti e pertanto $p_1^{\beta(\alpha)}<p_1^{(\alpha)}$, e viceversa.

Lo stesso tipo di ragionamento permette di dimostrare facilmente - per il caso qui ipotizzato, in cui le tecniche α e β differiscono per il metodo produttivo di *una sola* merce *comune*, diciamo la merce 1 - che se $w^{(\alpha)}(r)=w^{(\beta)}(r)$ allora sono uguali i prezzi di tutte le merci comuni, e viceversa. Infatti, se ai prezzi $(p^{(\alpha)},w^{(\alpha)})$ si ha $p_1^{\beta(\alpha)}=p_1^{(\alpha)}$ come discende necessariamente dalla considerazione dell'impresa composita quando $w^{(\alpha)}=w^{(\beta)}$, allora i prezzi $(p^{(\alpha)},w^{(\alpha)})$ danno un saggio di profitto pari al dato r anche con la tecnica β (completando $p^{(\alpha)}$ assumendo prezzi pari ai prezzi d'offerta anche per le merci che compaiono in β ma non in α). Ma una volta fissato il numerario si sa che i prezzi e il saggio di salario associati a un dato saggio di profitto e a una data tecnica sono

---

beni capitali specifici ad esso. Essa non sembra però poter essere rilevante eccetto che per innovazioni che comportano riduzioni dei costi molto piccole.

4 . Anche nel caso limite in cui vi fosse una sola merce comune tra le due tecniche - merce che dovrebbe essere allora necessariamente la merce-salario numerario - sarebbe sempre possibile determinare i prezzi che le merci che compaiono solo nella tecnica β avrebbero, se prodotte come merci di lusso nell'economia adottante la tecnica α. Si tratterebbe infatti di aggiungere alle n equazioni di prezzo determinanti i prezzi (α) tante ulteriori equazioni quante sono queste merci che compaiono solo nella tecnica β; il salario $w^{(\alpha)}$ fisicamente specificato costituirebbe il legame tra di esse e le prime n. Esempio: tecnica α: un solo bene, grano prodotto da grano e lavoro; tecnica β: due industrie, grano (merce 1) prodotto da legno (merce 2) e lavoro, e legno prodotto da legno e lavoro. Il prezzo d'offerta $p_2^{\beta(\alpha)}$ del legno è determinato da $p_2=(1+r)p_2a_{22}+w^{(\alpha)}L_2$.

univocamente determinati, e dunque non possono esservene altri compatibili con il dato r; dunque $p^{(\beta)}(r)$, soluzione di $p=(1+r)A^{\beta}+wL^{\beta}$, necessariamente coincide con $p^{(\alpha)}(r)$ completato come indicato sopra, e dunque per le merci comuni alle due tecniche i prezzi sono gli stessi. (Qualora vi fossero merci in α non in β, allora la coincidenza vi sarebbe tra $p^{(\alpha)}(r)$ completato come indicato, e $p^{(\beta)}(r)$ completato a includere le merci in α e non in β, da pensarsi adesso come merci prodotte in β come merci di lusso.)

5.

Dato un numerario e due curve w(r) corrispondenti a due tecniche α e β che permettono di produrlo, e adottabili al dato r, le due tecniche potrebbero differire per i metodi produttivi di più di una merce comune. In tal caso è possibile costruire altre tecniche, comprendenti alcuni metodi di α e altri di β, fino ad avere tutte le tecniche ammissibili, sulla base dei metodi che compaiono in α o in β, per la produzione del dato numerario. Tra queste (che includono anche α e β), ve ne sarà almeno una che genera il massimo w per il dato r, e che dunque sarà sull'inviluppo esterno delle curve w(r), ed è noto che la scelta delle tecniche finirà per portare su tale inviluppo. Può l'impresa composita essere di aiuto per dimostrare in modo semplice tale risultato?

Si noti che, date due qualsiasi tecniche ε ed η tra quelle così costruite, che differiscano anche per i metodi produttivi di più merci comuni, e fissato il saggio di profitto, resta sempre possibile chiedersi se, ai prezzi $(p^{(\varepsilon)},w^{(\varepsilon)})$, un'impresa composita, che adottasse la tecnica η, sarebbe profittevole, e la risposta verrà data dal segno di $w^{(\eta)}-w^{(\varepsilon)}$: se positivo, esso indica che l'impresa composita farebbe un extraprofitto. L'impresa composita potrebbe dunque permettersi di vendere il numerario, o un'altra qualsiasi tra le merci che produce e che sono prodotte anche nella tecnica ε, a un prezzo più basso, e pertanto la sua tecnica si imporrebbe. Se fosse plausibile che nascano imprese così integrate come l'impresa composita, allora la tendenza all'inviluppo esterno delle curve w(r) sarebbe dimostrata. Tuttavia l'impresa composita sarebbe composta di migliaia di sottoimprese, dunque va considerata una costruzione ausiliaria soltanto([5]).

Ma è possibile raggiungere il risultato desiderato in altro modo. Dati gli scopi essenzialmente didattici di questa nota, esamino solo il caso più semplice.

Siano α e β due tecniche, che differiscono per il metodo produttivo sia della merce 1 che della merce 2. Supponiamo che esse abbiano tutte le merci in comune. Indichiamo con $\alpha1$, $\alpha2$ i metodi produttivi delle merci 1 e 2 nella tecnica α, e con $\beta1$, $\beta2$ i metodi produttivi delle merci 1 e 2 nella tecnica β. Sia $w^{(\alpha)}<w^{(\beta)}$. Dimostriamo che allora, ai prezzi $(p^{(\alpha)},w^{(\alpha)})$, almeno uno dei due metodi $\beta1$, $\beta2$ è più conveniente del rispettivo metodo $\alpha1$ o $\alpha2$.

Supponiamo che non sia così, e cioè che sia $p_1^{\beta(\alpha)}\geq p_1^{(\alpha)}$ e $p_2^{\beta(\alpha)}\geq p_2^{(\alpha)}$. Ne deriva, da quanto visto in precedenza, che $w^{(\alpha\beta1)}\leq w^{(\alpha)}$ e $w^{(\alpha\beta2)}\leq w^{(\alpha)}$, dove $w^{(\alpha\beta1)}$ indica il saggio di salario della tecnica α ma con il metodo $\beta1$ al posto del metodo $\alpha1$, tecnica che indico come tecnica $\alpha(\beta1)$; e analogamente per $w^{(\alpha\beta2)}$. (Nelle nostre ipotesi ovviamente la tecnica $\alpha(\beta1)$ coincide con la tecnica $\beta(\alpha2)$.) Dunque ai prezzi e salario (α) un'impresa composita che adotti la tecnica $\alpha(\beta1)$ o è in pareggio, o fa "perdite" pari a $w^{(\alpha\beta1)}-w^{(\alpha)}$, e al suo interno la sola sottoimpresa eventualmente in perdita è la sottoimpresa che produce la merce 1, mentre le altre sottoimprese sono in pareggio. Una seconda impresa composita che adotti la tecnica $\alpha(\beta2)$ è in pareggio o fa "perdite" pari a $w^{(\alpha\beta2)}-w^{(\alpha)}$, e al suo interno la sola sottoimpresa eventualmente in perdita è la sottoimpresa che produce la merce 2, mentre tutte le altre sottoimprese sono in pareggio. Adesso supponiamo che la prima impresa composita ceda alla seconda la sua sottoimpresa 1 (la sottoimpresa che produce la merce 1 col metodo $\beta1$), ricevendo in cambio la sottoimpresa 1 (che utilizza il metodo $\alpha1$)

[5] . Vi è però un caso, che per quanto empiricamente implausibile la teoria deve considerare, nel quale l'unico modo in cui una nuova tecnica β può essere confrontata con una vecchia tecnica α è mediante la considerazione dell'intera impresa composita adottante la tecnica β: ed è il caso in cui il nuovo metodo riguarda la merce-salario, e la nuova tecnica differisce dalla vecchia in *tutte* le merci inputs della merce-salario (che può anche essere composita), v. sopra, nota 4.

della seconda impresa composita. Dopo tale scambio, le due imprese non rispettano più la definizione di impresa composita: chiamiamole imprese composite modificate; la prima impresa composita modificata utilizza la tecnica α, e tutte le imprese che la compongono sono pertanto in pareggio; la seconda impresa composita modificata usa la tecnica β, e il suo bilancio non può essere migliorato rispetto a prima dello scambio, in quanto in essa l'impresa che produce la merce 2 è in pareggio o in perdita quanto prima, ma adesso può essere in perdita anche l'impresa che produce la merce 1. Per l'ipotesi di rendimenti costanti di scala, se le imprese variano le loro dimensioni esse restano in pareggio se erano in pareggio, in perdita se erano in perdita. Dunque anche cambiando le quantità prodotte nella seconda impresa composita modificata in modo da farla tornare a soddisfare la definizione di impresa composita, le sottoimprese 1 e 2 restano in pareggio o in perdita, e questo dimostra che un'impresa composita che adotti la tecnica β non può guadagnare extraprofitti ai prezzi $(p^{(\alpha)},w^{(\alpha)})$, e dunque non è in grado di pagare un salario maggiore di $w^{(\alpha)}$, contro l'ipotesi di partenza. Pertanto non è possibile che quando $w^{(\alpha)}<w^{(\beta)}$, valgano simultaneamente $p_1^{\beta(\alpha)}\geq p_1^{(\alpha)}$ e $p_2^{\beta(\alpha)}\geq p_2^{(\alpha)}$: almeno uno dei due metodi produttivi $\beta 1$ o $\beta 2$ risulterà più conveniente del corrispondente metodo della tecnica α, e quindi verrà introdotto.

Pertanto, se $w^{(\beta)}>w^{(\alpha)}$, allora possiamo essere certi che l'economia tenderà ad abbandonare la tecnica α, magari introducendo simultaneamente vari nuovi metodi; se supponiamo che si cambi un metodo per volta, tale cambiamento sarà a favore - se non vi sono alternative ancora migliori provenienti da ancora altre tecniche - di una tecnica γ che includa almeno uno dei metodi di β non in α. A questa tecnica γ potrà corrispondere un saggio di salario minore, uguale o maggiore di $w^{(\beta)}$. Se minore, allora si può ripetere il ragionamento, e l'economia tenderà ad abbandonare la tecnica γ a favore di una tecnica δ che includa almeno uno dei metodi di β non in γ; dunque finché il salario è inferiore a $w^{(\beta)}$, in mancanza di alternative ancora migliori la tecnica dell'economia tende sempre più a coincidere con β; dunque, se la curva $w^{(\beta)}(r)$ è sull'inviluppo esterno delle curve w(r) in corrispondenza del dato r, e non vi coesiste con altre curve w(r), allora necessariamente l'economia tende ad adottare la tecnica β.

Se al dato r la tecnica β coesiste sull'inviluppo esterno con un'altra tecnica, diciamo γ, allora si dimostra che le due tecniche possono coesistere perché necessariamente le due tecniche hanno gli stessi prezzi per tutte le merci in comune. Abbiamo già visto che questo è il caso se le tecniche differiscono per il metodo produttivo di una sola merce comune. Se le tecniche differiscono per i metodi produttivi di più di una merce comune, la dimostrazione è *a contrario*. Supponiamo che per qualche merce comune il prezzo non sia lo stesso nelle due tecniche. Allora un'impresa composita che adotti la tecnica β ai prezzi $(p^{(\gamma)},w^{(\gamma)})$ sarà complessivamente in pareggio perché restituisce gli inputs accresciuti della percentuale r e inoltre paga il salario $w^{(\beta)}=w^{(\gamma)}$, ma almeno una sua impresa sarà in deficit, perché i prezzi dei prodotti che le permetterebbero di avere il pareggio in tutte le sue imprese sono univocamente determinati, sono i prezzi $p^{(\beta)}$ che per ipotesi differiscono dai prezzi $p^{(\gamma)}$. In almeno una delle altre sue imprese il bilancio sarà dunque in attivo. Sia ad esempio in attivo l'impresa 1. Ciò vuol dire che, ai prezzi e salario della tecnica γ, il metodo β1 è più conveniente del metodo γ1; per cui, per i risultati visti in precedenza, la tecnica γ(β1), cioè la tecnica γ con il metodo β1 al posto del metodo γ1, è in grado di pagare un salario maggiore di $w^{(\gamma)}$, il che contraddice l'ipotesi che $w^{(\beta)}=w^{(\gamma)}$ sia sull'inviluppo esterno.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI COMMENTATI

Il 'teorema di Okishio' è in Nobuo Okishio, "Technical change and the rate of profits", *Kobe University Economic Review*, vol. 7, 1961; la dimostrazione di Bowles è in S. Bowles, "Technical change and the profit rate: a simple proof of the Okishio theorem", *Cambridge Journal of Economics*, 1981, 5, 183-186. Questo teorema viene detto 'di Okishio' soprattutto nei dibattiti tra marxisti, perché l'articolo di Okishio è stato il punto di partenza di un acceso dibattito tra marxisti sulla validità della 'legge della caduta tendenziale del saggio di profitto' (il dibattito è antologizzato, e passato in rassegna nell'*Introduzione* dei curatori, in K. Shibata e altri, *Accumulazione del capitale e progresso tecnico*, a cura di E. Screpanti e M. Zenezini, Milano: Feltrinelli, 1978, che contiene anche la traduzione dell'articolo di Okishio). La correttezza di tale denominazione è però questionabile: lo stesso Okishio in un altro suo scritto di poco posteriore ("A mathematical note on Marxian theorems", *Weltwirtschaftliches Archiv*, 1963) rinvia, per la dimostrazione che se viene trovato conveniente introdurre un nuovo metodo allora il saggio di profitto aumenta, non al suo precedente articolo bensì a P. Samuelson, "Wages and interest: a modern dissection of Marxian economic models", *American Economic Review*, 1957. Avrebbe potuto anche rinviare a Piero Sraffa, *Produzione di merci a mezzo di merci*, Einaudi, 1960, §93.

Forse la prima dimostrazione rigorosa - e alquanto laboriosa - del Teorema 1, estesa anche a tecniche che differiscono per molte merci, è quella in P. Garegnani, Nota matematica a "La funzione di produzione, il capitale eterogeneo e la teoria della distribuzione", in P. Sylos Labini, *Prezzi relativi e distribuzione del reddito*, Torino: Boringhieri, 1973. Per una dimostrazione succinta (per il solo caso di tecniche con ugual numero di merci e con tutti i metodi in comune tranne uno), rappresentativa dello stile dimostrativo oggi dominante, si veda Gilbert Abraham-Frois e Edmond Berrebi, "Choice of Techniques", in H. D. Kurz, N. Salvadori (eds.), *The Elgar Companion to Classical Economics*, vol. I, Edward Elgar, 1998. Per una trattazione generale approfondita, estesa anche ai beni di lusso, si veda Heinz D. Kurz, Neri Salvadori, *Theory of Production*, Cambridge University Press, 1995, cap. 5.

Ringrazio per i loro commenti Neri Salvadori e Mauro Caminati, e il MURST per il sostegno finanziario nell'ambito dei fondi ex 40%.