

quaderni dell'istituto di economia
n. 28

Lionello F. Punzo

La matematica di Sraffa



Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie
Università degli Studi di Siena

*Pubblicazione dell'Istituto di Economia
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie
Università degli Studi di Siena*

Lionello F. Punzo

La matematica di Sraffa

*1984, ottobre
Stamperia della Facoltà*

Il Professor Lionello F. Punzo
insegna Economia Matematica
presso l'Istituto di Economia
della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie
dell'Università di Siena

Convegno Internazionale: Un intellettuale europeo del XX secolo: Piero Sraffa, 1898 - 1983, organizzato dall'Istituto Piemontese di Scienze Economiche e Sociali Antonio Gramsci, Torino, 28 - 29 maggio 1984

"The miracle of the appropriateness of the language of mathematics for the formulation of the laws of physics is a wonderful gift which we neither understand nor deserve. We should be grateful for it and hope that it will remain valid in future research and that it will extend, for better or for worse, to our pleasure even though perhaps also to our bafflement, to wide branches of learning"
(E.P. Wigner, "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences", in Communication in Pure and Applied Mathematics, vol. 13, Courant Institute of New York University, New York, 1960).

§.0 - Mi sono proposto questo tema, la matematica di Sraffa, essenzialmente per la seguente ragione. Innanzitutto, immaginavo che tale tema non sarebbe stato toccato da nessuno, e ciò avrebbe costituito una carenza forse grave in una valutazione equilibrata di Sraffa come uomo del XX secolo. Eppure, occorre ricordare che uno dei motivi dello scalpore, per così dire, che *Produzione di Merci* suscitò alla sua apparizione, fu proprio il linguaggio matematico e le tecniche dimostrative tutte particolari che in quel libro si ritrovano; ma la discussione si è poi di fatto spenta, ed è diventata opinione generale quella secondo la quale, sotto il profilo formale, l'analisi contenuta in *Produzione di Merci*, pur inerentemente matematica, è incompleta e, perciò, 'insoddisfacente'. Dall'epoca della prima recensione che ha sollevato il "problema", quella ben nota di P. Newman nel

1962, l'analisi di Sraffa ha subito una profonda trasformazione: da una parte, si è trasformata in un modello (il 'modello di Sraffa') o in un insieme di modelli, in altre parole in strutture formali precisate nelle ipotesi e nelle regole di inferenza logica; dall'altra, tutti i risultati sono stati ritrascritti e controllati nei termini del linguaggio neo-walrasiano, come preannunciava Newman. Essi, cioè, sono divenuti teoremi, alcuni veri altri falsi, all'interno dei modelli.

E' mia opinione che l'operazione di trascrizione e formalizzazione ha finito per oscurare alcuni aspetti importanti del contributo di Sraffa, e che un'analisi di Produzione di Merci dal punto di vista della sua struttura analitico-formale e della tecnica di ragionamento sia almeno altrettanto interessante della discussione di altri aspetti più tradizionali del contributo di Sraffa. La 'ripresa dal punto di vista dei classici' si fonde con una posizione originale e controcorrente rispetto a quella che, nel dibattito metodologico che l'ambiente di ispirazione walrasiana (quello dell'EEG) ha attraversato, si è alla fine affermata.

Mi propongo di dare una risposta, ovviamente provvisoria, a due problemi: i) perchè la matematica di Sraffa è quella che è; ii) che relazione intercorre tra tale matematica e l'operazione culturale proposta da Produzione di Merci. Entrambe le domande sottintendono la questione più generale, quale sia la relazione con la matematica ora dominante nella pratica della teorizzazione economica. Discutendo brevemente

quest'ultimo problema, verrà suggerita una contrapposizione di programmi e intenti, laddove è opinione generale che vi sia una compatibilità virtuale. Per metter ciò nella giusta luce, si accennerà a Von Neumann ed al gruppo viennese intorno a K. Menger, perchè rappresentano il punto di svolta della teoria dell'equilibrio economico generale.

Occorre premettere quali sono i confini della mia discussione. Per "matematica", qui, si intenderà non tanto lo insieme dei teoremi propriamente della matematica come disciplina o scienza, cui Sraffa ricorre nelle sue dimostrazioni. In effetti, se partissimo da questo punto di vista, avremmo finito in un attimo: Sraffa ricorre solamente a teoremi elementari dell'algebra. Invece per matematica si intenderà: i) il processo di strutturazione formale dei problemi analitici che Sraffa propone; ii) la tecnica di dimostrazione in senso proprio; iii) infine, che cosa si intende dimostrare cioè che informazione contengono i "teoremi" così laboriosamente ottenuti in Produzione di Merci.

§.1 - Ad un occhio 'moderno', allenato sulla teoria dell'equilibrio Economico Generale, Produzione di Merci ha una struttura ed usa una tecnica formali alquanto strane. Le ipotesi non sono elencate in ordine e molto spesso si debbono ricavare dalle note; un'assiomatica seppure esiste non appare esplicitamente; infine, le regole di derivazione dei teoremi e che cosa questi debbano effettivamente stabilire (il loro contenuto) non risultano chiari. Ma, in par-

ticolare, quello di cui si nota la mancanza è la proposizione tipica con la quale si apre, e spesso si chiude, un modello dell'EEG: la dimostrazione di esistenza di una soluzione economicamente significativa, quella dimostrazione che spesso sembra il culmine del modello ed in qualche modo la sua giustificazione vera.

Vi sono in Sraffa due tipi di proposizioni 'teoremi': i) in una prima classe sono le dimostrazioni che certi concetti teorici sono sufficientemente ben "definiti" da essere operativi; ii) in una seconda classe cadono tutte quelle proposizioni che descrivono il comportamento di alcune variabili, quelle 'rilevanti', in funzione delle altre (in un linguaggio tradizionale, le proposizioni di statica comparata). Non sono queste ultime in causa, qui; sono invece le prime, anche se ovviamente, nessuna proposizione del secondo tipo potrebbe a rigore essere derivata se non siamo in possesso dei risultati ben precisi del primo tipo. Alle proposizioni del primo tipo, si perviene con una serie di operazioni preliminari che strutturano il problema formale e, nelle intenzioni, dovrebbero renderlo risolvibile.

Sono innanzitutto introdotti una serie di termini elementari che vengono definiti solo implicitamente: sono essenzialmente tre, sistema, a volta chiamato anche società, merce e metodo di produzione. Tali termini forniscono gli elementi base per la definizione di alcuni oggetti teorici, anch'essi essenzialmente tre: i) i prezzi di produzione; ii) la merce tipo; iii) i subsistemi. Da un punto di vista formale-

astratto, la definizione di ciascuno di questi ultimi richiede la formulazione e soluzione di un corrispondente sistema di equazioni. Prezzi di produzione, sistema tipo e subsistemi, sono interpretati come variabili incognite nelle equazioni che assumono come parametri i dati numerici rappresentanti i metodi di produzione. Per ciascuno di questi sistemi di equazioni si pone, dal punto di vista dell'approccio neoclassico moderno, il problema di dimostrare l'esistenza di soluzioni economicamente significative e una tecnica uniforme viene usualmente introdotta per trattare i tre sistemi (ed è quella che conosciamo, basata sull'algebra lineare). Sraffa invece adotta tecniche almeno apparentemente diverse a seconda che si tratti dei prezzi di produzione o degli altri due insiemi di variabili: la tecnica sembra conformarsi alla natura concettuale dei singoli problemi.

Può essere illustrativo il caso dei prezzi di produzione. Sraffa confronta il numero delle equazioni con quello delle incognite, e si limita a controllare che il primo non ecceda il secondo: soddisfatta tale condizione, e purchè vengano fissate le incognite libere, otteniamo un sistema determinato che, si dice, avrà in generale delle soluzioni, cioè un insieme unico di prezzi di produzione in corrispondenza di ciascun valore predeterminato, diciamo, del saggio di profitto. Chiamerò questo metodo di dimostrazione, "counting of equations", e per il momento basti ricordare che era il metodo di dimostrazione di Walras, fatte salve ovviamente le differenze fondamentali tra i due sistemi (quello

walrasiano è essenzialmente non-lineare). Era il metodo classico di dimostrare l'esistenza di soluzioni fino almeno alla pubblicazione (1938) di Valore e Capitale di J. Hicks. Vedremo che tale somiglianza è più profonda di quanto non possa sembrare a prima vista.

Quella che ho appena esposto è intenzionalmente la "vulgata" del problema dei prezzi di produzione: la sintesi di un processo di strutturazione del problema in modo da ottenere una proposizione da dimostrare. Le equazioni dei prezzi di produzione sono infatti ottenute attraverso un insieme di operazioni spesso dimenticate: conviene allora ricostruire la manipolazione preliminare, perchè, implicando una serie di scelte, da essa derivano limiti e qualificazioni alla proposizione di "esistenza".

Abbiamo innanzitutto alcune ipotesi sperimentali in senso lato, tra cui è caratteristica quella secondo la quale nel bilancio materiale del sistema ipotetico in oggetto viene rilevata una eccedenza (il sovrappiù in termini fisici): come si sia pervenuti a tale eccedenza, attraverso quali leggi tecniche la trasformazione degli inputs in outputs l'abbia generata, non è detto. Vi è d'altra parte anche una ipotesi importante che decide del formato dei dati: che cioè vi siano altrettanti 'metodi di produzione' (nel caso di produzione singola) o altrettanti 'processi' (nel caso di produzione congiunta) quante sono le merci. Nell'impostazione di Sraffa tale ipotesi si rivela talmente importante che, quando nel caso di produzione congiunta, si presenta la

possibilità che vi siano meno processi di quante siano le merci, Sraffa sottolinea che: i) vi sarà in 'generale' spazio per altri processi; ii) che ciò può giustificarsi intuitivamente con il fatto che, altrimenti, non sarebbe in generale possibile soddisfare le richieste d'uso. Sulla base di queste due osservazioni, Sraffa si sente legittimato ad aggiungere tanti 'metodi di produzione' quanti ne occorrono¹, con una operazione che chiamerò 'orlamento' prendendo a prestito il termine dall'algebra.

Si ottiene così una costellazione ordinata di n^2 parametri (n è la cardinalità delle merci) che possiamo raccogliere simbolicamente in una matrice. Se accettiamo la convenzione secondo la quale le righe corrispondono a quantità omogenee della stessa merce, allora la somma delle righe ci darà il bilancio materiale della nostra 'società'. Data questa interpretazione, la medesima costellazione ordinata di parametri apparirà in tutti i sistemi di equazioni di Sraffa, (per cui d'ora in poi la chiameremo semplicemente matrice): le operazioni che conducono alla determinazione dei prezzi saranno operazioni sulle colonne, mentre le operazioni che producono merce-tipo e subsistemi opereranno sulle righe della stessa matrice. L'idea quindi di matrice introduce un elemento di unificazione linguistico-formale nella rappresentazione teorica del nostro sistema ipotetico.

Dalla nostra ricostruzione, dovrebbe essere emerso chiaramente il carattere che comunque ha l'insieme dei parametri: essi sono pseudo dati innanzitutto perchè ipotetici (il sistema cui si riferiscono è in condizioni ideali) e

poi, ancor più, perchè costruiti secondo un criterio di sufficienza logico-matematica che non siamo tuttavia ancora in grado di apprezzare: è come frutto di questo miscuglio di ipotesi sperimentali e di operazioni logiche, che otteniamo una matrice quadrata.

Dal momento che la configurazione produttiva ed il suo bilancio materiale non mutano nelle condizioni ideali in cui ci siamo posti, la "matrice" rappresenta un insieme di costanti da utilizzare nelle equazioni dei prezzi. Dal punto di vista matematico il problema non è tuttavia ancora 'semplice', come osserva lo stesso Sraffa (p. 7): occorre introdurre un criterio sulla distribuzione del sovrappiù che per ipotesi è presente nel nostro sistema, una volta introdotto il quale dal punto di vista economico le equazioni dei prezzi esprimono un problema di natura puramente contabile. Se, come è classico, introduciamo l'ipotesi del saggio di profitto unico, la matrice dei parametri diviene una funzione del saggio di profitto, e non è più quindi una matrice di costanti. E' a questo punto che possiamo scrivere le equazioni le cui incognite sono i prezzi di produzione, il saggio di profitto unico ed il saggio di salario: abbiamo al più n equazioni linearmente indipendenti e sicuramente $n+2$ incognite, a riflettere il fatto che il nostro sistema formale è essenzialmente nonlineare (per effetto della proprietà della matrice di essere funzione del saggio di profitto).

In effetti, che questa sia la sua natura viene spesso dimenticato, ma si può vedere facilmente: la teoria elemen-

tare delle equazioni lineari insegna che si possono ottenere soluzioni determinate solo se prefissiamo i valori di due incognite, così da determinare le rimanenti in funzione di quelle. Se prefissiamo il saggio del salario e riconosciamo in una delle merci il numerario, rimangono da determinare $(n-1)$ prezzi ed il saggio del profitto (unico per ipotesi): ma è facile accorgersi che la relazione che lega le incognite ai valori delle variabili esogene è nonlineare di un grado alto.

Tuttavia, il problema può essere trattato come problema lineare se, in luogo del saggio del salario, consideriamo come esogena la variabile 'saggio di profitto': infatti, per ogni valore pre-assegnato di questa ultima, la matrice che appare nelle relazioni di prezzo è di nuovo una matrice di costanti, ed il problema è lineare nei prezzi come variabili incognite². Solo adesso, finalmente, siamo arrivati al problema dei prezzi nella versione standard a tutti familiare.

§.2 - Abbiamo riconosciuto uno dei procedimenti di Sraffa, e l'abbiamo interpretato come procedimento "standard", nella misura in cui evidenzia un'operazione cruciale: la riduzione, tramite la selezione della variabile esogena di un problema matematico intrinsecamente nonlineare ad un problema lineare.

Almeno per il momento questo appare come prodotto logico della decisione di usare un metodo elementare di soluzione: come si mostra in nota³, per trattarlo come problema nonli-

neare occorre o un procedimento laborioso oppure (ma anche, eventualmente, in congiunzione) una discussione puramente qualitativa, tipica delle dimostrazioni topologiche di esistenza. La strada scelta da Sraffa, quella dell'algebra elementare, ha in un certo senso un duplice 'vantaggio': da una parte, quello di fornire un criterio di risolubilità immediatamente applicabile (basta guardare la matrice dei coefficienti ricalcolata tenendo conto del saggio del profitto prefissato, che è solamente uno scalare); dall'altra, quello che gli stessi criteri di "esistenza di soluzione" garantiscono allo stesso tempo la possibilità logica di calcolare la soluzione con procedimento elementare. Entrambi questi criteri sono soddisfatti dalla teoria delle equazioni lineari come si era sviluppata fino alla metà del secolo scorso, con Cayley e Sylvester, ed in generale la scuola di Cambridge.

Tale algebra era il risultato naturale dello sviluppo parallelo di due filoni della storia della matematica: da una parte la teoria delle equazioni polinomiali, che derivava dai problemi degli algebristi arabi del medioevo, ed era poi stata rifinita dagli attuaristi italiani del Rinascimento; dall'altra parte, gli studi di geometria analitica che da Cartesio, il suo fondatore, in poi, avevano interessato tutti i matematici più importanti del XVIII secolo. Prima della sua riformulazione assiomatica, che fu opera essenzialmente di Cayley, questa teoria algebrica si muoveva nello stesso ambito nel quale si muove la moderna analisi numerica: assicurarsi dell'esistenza di una soluzione era sino-

nimo di provvedere un metodo effettivo per il suo calcolo. Da questo punto di vista, Sraffa si inserisce in una tradizione matematica precedente agli sviluppi del nostro secolo, e di questa accetta anche il canone di significatività, che associa esistenza di soluzioni con calcolabilità⁴.

Il motivo di tale scelta risiede ovviamente nell'interpretazione puramente contabile che del problema dei prezzi ha dato Sraffa, per cui non sembra più sufficiente sapere che una soluzione deve esistere: occorre avere un metodo, nella forma di un algoritmo logico (semplice quanto quelli impiegati 'normalmente' nei procedimenti contabili), per poter procedere, almeno in linea di principio, al suo calcolo effettivo. Per tale motivo, nel caso della dimostrazione di Sraffa per i prezzi di produzione ed il saggio del salario, occorre parlare di 'rinvenimento di una soluzione' e non semplicemente di dimostrazione della sua esistenza: per quest'ultima, potrebbe bastare un ragionamento puramente qualitativo, volto ad individuare come è diventato tradizionale solo le condizioni sufficienti a garantirla.

Solo dopo che il problema è stato posto in un formato preciso attraverso un insieme di ipotesi e di scelte, interviene il conto delle equazioni: contrariamente a quanto accade in Walras, abbiamo ora di fronte un problema lineare, un insieme di equazioni coefficienti nel campo dei numeri razionali, che data la sua linearità, avrà eventualmente soluzioni nel campo dei numeri reali. Mentre nel caso di Walras il criterio dell'uguaglianza del numero di equazioni con il numero delle incognite non è nè necessario nè suffi-

ciente ad assicurare esistenza ed unicità di una soluzione (nei prezzi come nelle quantità), nel caso del sistema di Sraffa, la condizione risulta necessaria e sufficiente per l'esistenza di una soluzione unica nelle incognite solo se non aggiungiamo l'ulteriore condizione tipica dei modelli economici che cioè queste siano anche nonnegative. In effetti, per ottenere che le soluzioni siano anche economicamente significative, occorrono, come ormai è ben noto, altre restrizioni o sulle proprietà della matrice dei parametri, oppure sullo "stato" del nostro sistema ipotetico.

Abbiamo già visto che in Sraffa prevale la seconda soluzione, quella di fare ipotesi sullo stato del sistema rappresentato simbolicamente dalla matrice dei flussi, la quale ipotesi comporta la seguente 'aspettativa': che normalmente (cioè in corrispondenza di un saggio di profitto 'normale'), le soluzioni nei prezzi e nel saggio di salario per un sistema reale che abbia prodotto un sovrappiù, saranno sia uniche che positive.

Possiamo comprendere l'affermazione precedente come se implicasse la presenza di condizioni implicite (da un punto di vista matematico) poste sui dati: i) che il saggio di profitto predeterminato non sia tale da azzerare il determinante della 'matrice'; ii) che non sia 'talmente alto' da richiedere che le equazioni siano soddisfatte per valori non tutti positivi dei prezzi. Ovviamente, in questo modo, abbiamo ricostruito delle condizioni sufficienti a dare un senso matematicamente preciso a quanto viene affermato in un modo non 'matematico': sulla base soltanto

di quanto si trova nel testo otteniamo la certezza della esistenza e allo stesso tempo dell'unicità di una soluzione non vincolata nel segno delle variabili (una soluzione formale-matematica), ma non più di questo. Come dimostrazione di esistenza di soluzioni economicamente significative, quella di Sraffa è chiaramente insoddisfacente, perchè queste sono un sottoinsieme, eventualmente vuoto, delle soluzioni matematiche del sistema formale di equazioni.

Walras aveva commesso l'errore di trattare come problema algebrico lineare un problema che per costruzione lineare non era. Sraffa si assicura innanzitutto di linearizzare il problema per cui il criterio del determinante (il conteggio delle equazioni e delle incognite) è necessario. Tuttavia, nessuno dei due distingue chiaramente tra soluzioni matematiche e soluzioni economicamente significative. Entrambi, comunque, si contentano di controllare che vi siano soluzioni del primo tipo, ed è a questo scopo che ricorrono alla matematica; a garantire invece la significatività dei dati a partire dai quali sono ottenute in quanto riflesso di uno stato, integrate eventualmente, come vedremo tra breve, dalla proposta di un algoritmo.

Dal punto di vista di Sraffa, come punto di vista contabile, il problema della significatività economica delle soluzioni è abbastanza semplice. Assumiamo che, al tasso di profitto prefissato, alcuni prezzi debbano nozionalmente diventare negativi perchè si possa pagare un saggio di salario uniforme: in questo caso, il nostro contabile ideale si limiterà a scrivere sui suoi appunti che quella configurazione

produttiva, a quel saggio di profitto, non può essere usata. Una volta scoperto questo, il contabile, che dobbiamo immaginare diligente quanto Sraffa vorrebbe, cercherà di vedere se quella configurazione possa essere usata in corrispondenza di almeno un valore del saggio di profitto, e ne prenderà nota. Le uniche configurazioni che non risulteranno per nulla rilevanti e verranno perciò cancellate dal block-notes, sono quelle che non possono essere usate a nessun livello del saggio di profitto. Queste vengono 'dimenticate'; messe da parte come informazione inutile. Il punto di vista del contabile perciò è semplice ed efficace: il lettore può controllare su Produzione di Merci se questo non sia anche il punto di vista di Sraffa⁵.

Quindi, i dati nel computer immaginario che calcola i prezzi vengono già da un block-notes di informazioni rilevanti, e non da astratte conoscenze tecniche. Da questo punto di vista, se le soluzioni sono uniche (ed ovviamente debbono esistere, altrimenti la tecnica non figurerebbe nemmeno tra i dati) saranno anche nonnegative, purchè il calcolo venga fatto per saggi di profitto opportuni. La questione logica della distinzione tra soluzioni economicamente significative e soluzioni formali-matematiche non sorge nemmeno. Il ragionamento viene integrato dall'osservazione di senso comune, secondo la quale se la configurazione è sul block-notes, vi dovrà ben essere un saggio di profitto a cui corrispondano prezzi tutti positivi.

5.3 - Il motivo per dilungarsi, come abbiamo fatto nel paragrafo precedente, sul problema dei prezzi sta essenzialmente nel fatto che, di tutti gli 'esercizi' proposti da Sraffa, questo è quello che forse ha subito, dal punto di vista matematico, le trasformazioni più profonde. Della natura ed estensione di tali trasformazioni, possiamo accorgerci facilmente dai libri di testo in circolazione: si tratta di una riformulazione talmente radicale che ormai è assolutamente impossibile distinguere (e valutare) quello che ha detto Sraffa da quello che hanno detto quanti si sono fatti alfieri dell'operazione. Per molti versi la riformulazione che nello spirito come nella tecnica ha tutto il sapore di una nuova 'sintesi neo-classica', si è articolata in due momenti logicamente distinti, ma come al solito interconnessi. Dal punto di vista della struttura formale, l'algebra degli interi tipica di Sraffa è stata rimpiazzata da una struttura di spazio topologico: i dati di Sraffa sono passati dal rango di 'osservazioni' a quello di sottoinsieme dell'insieme di dati 'osservabili', connessa all'interpretazione neo-classica dello spazio ideale nel quale si comprende il sistema. Muta lo spazio concettuale della descrizione e la 'matrice' dei parametri, come puri numeri diventa matrice di 'coefficienti' tecnici in senso proprio, e descrive un sottoinsieme convesso nello spazio delle merci (tecnicamente, un cono poliedro convesso). I parametri del problema dei prezzi di produzione vengono quindi interpretati come punti sulle funzioni di produzione di una tecnologia lineare (cioè, come una realizzazione di una tecnologia particolare).

La controparte algebrica di questa ri-definizione sta nel fatto che la matrice non riflette più semplicemente una operazione volta ad introdurre un ordine nell'insieme dei dati; diventa un operatore lineare in uno spazio a dimensione finita. Nell'ipotesi di rendimenti di scala costanti di cui stiamo parlando, infatti, il termine 'matrice' perde il suo significato puramente linguistico di espressione sintetica per assumere uno più pregnante, per il quale esiste una teoria matematica precisa. Tutte le dimostrazioni fanno perciò ricorso o ai teoremi sugli operatori lineari oppure a considerazioni topologiche. Abbiamo così puri teoremi di esistenza, nel senso specifico in cui siamo abituati a comprendere il significato di prova di esistenza.

Abbiamo invece argomentato che lo spazio nei quali si iscrivono i dati di Sraffa non ha alcuna struttura naturalmente topologica: l'insieme dei parametri rappresenta un punto non sulle funzioni di produzioni, ma nello spazio di fase di un ipotetico sistema in osservazione in laboratorio. Coinvolge perciò una nozione familiare a chi si occupa di sistemi dinamici, ma non a chi è ancorato ad un approccio intrinsecamente statico all'analisi economica.

Una struttura topologica allora vi può essere "aggiunta", ma questo è ridondante dal momento che le operazioni che Sraffa compie non prevedono, anzi assumono che la costellazione dei parametri non muti. Ciò si riflette nel fatto che la matrice dei parametri non è un operatore necessariamente lineare (e d'altronde il problema è irrile-

vante anche dal punto di vista dei prezzi perchè è in qualsiasi caso intrinsecamente nonlineare). La dimostrazione di esistenza di Sraffa non è elegante da un punto di vista formale, ed ha una generalità matematica alquanto dubbia; d'altra parte, si basa interamente e solamente sulle ipotesi introdotte a specificazione delle proprietà dei dati.

§.4 - Abbiamo visto che uno dei criteri della dimostrazione di esistenza è quello che abbiamo definito criterio della calcolabilità con metodi elementari. Nel problema dei prezzi, il requisito appare soddisfatto naturalmente come risultato dell'impiego dei teoremi elementari sui determinanti: è in un certo senso un prodotto congiunto dell'approccio, "nascosto" dietro al risultato principale. Lo ritroviamo invece in primo piano nelle dimostrazioni che riguardano merce tipo e subsistemi. In entrambi i casi la dimostrazione avviene per costruzione e calcolo ed è decisamente laboriosa. Dal sistema 'reale' vengono ritagliati i due sistemi ausiliari e che ciò si possa fare viene suggerito indicando l'insieme delle operazioni elementari necessarie. Anche in questi casi, sappiamo ormai che, nell'ipotesi di una struttura topologica convessa, ovvero se si accetta l'idea che la matrice dei parametri sia un operatore lineare, entrambe le prove sono più spedite: alla prima corrisponde il calcolo di un autovalore nello spettro della matrice e del corrispondente autovettore; nel secondo caso si tratta di invertire la matrice.

Anche qui le proprietà degli operatori monotoni in spazi di dimensioni finite forniscono gli strumenti per una trattazione uniforme di entrambi i problemi: per di più, una trattazione che non richiede alcun calcolo esplicito della soluzione, perchè le proprietà qualitative di tale classe di operatori sono ben note. Sfortunatamente Produzione di Merci, come abbiamo già detto, lascia aperta la porta alla possibilità che la matrice dei parametri non appartenga a quella classe: è innanzitutto per cautelarsi contro questa evenienza, che occorre inventare un metodo più generale di dimostrazione, e quello proposto da Sraffa è un metodo logico-numerico, un algoritmo matematico che permette al lettore di seguire, passo passo, le operazioni attraverso le quali dal sistema attuale si ricavano i sistemi teorici. I passi elementari sono costituiti dall'applicazione successiva di opportuni moltiplicatori, la stessa tecnica concettuale che troviamo nel procedimento di eliminazione delle merci non-base. Tecnica analoga è anche all'opera nel problema, di statica comparata, della scelta della configurazione produttiva più profittevole.

Ci troviamo in conclusione di fronte ad una tecnica uniforme di dimostrazione, che fa perno sul requisito della calcolabilità in senso logico. Una prova costruttiva soddisfa naturalmente questo requisito, perchè dimostra l'esistenza di un oggetto matematico mostrando come può essere logicamente costruito. Viceversa, una prova costruttiva non soddisfa normalmente quei requisiti di economia e sintetici-

tà che sono tipici delle dimostrazioni formaliste (per contraddizione) di esistenza tipiche dell'analisi dell'equilibrio economico generale.

Essa, tuttavia, presenta un vantaggio: quello di mostrare chiaramente sia quando e dove opportune ipotesi sono necessarie per procedere sia l'oggetto stesso della dimostrazione. In qualche modo, quindi, essa sottolinea il processo effettivo con il quale si giunge alla conclusione da stabilire, perchè si ritiene che il processo stesso sia fonte di informazione, e non solo il suo risultato finale, la proposizione di cui si deve stabilire la verità. Per tale motivo, si contrappone alla prova formalistica che dall'insieme delle ipotesi elencate all'inizio dell'esercizio "salta" direttamente al risultato finale⁶.

Se con la trattazione dei prezzi la tecnica di Sraffa rimane nell'ambito dell'algebra pre-assiomatizzata ottocentesca, l'approccio costruttivo lo collega, come vedremo, ad un filone importante di pensiero matematico di questo secolo: il costruttivismo. Per tale motivo, d'ora in poi seguiremo un filo di ragionamento incentrato sul metodo di dimostrazione di Sraffa: vi è infatti una storia di avvenimenti molto importanti per comprendere la problematica attuale della teoria economica.

§.5 - Anche tenendo conto del suo carattere di algoritmo, la "dimostrazione" di Sraffa non è nè completa nè rigorosa: infatti, manca per esempio l'esplicita conside-

razione delle condizioni nelle quali l'algoritmo converge ad una soluzione. La 'prova' quindi non fornisce un algoritmo nel senso proprio, numerico, del termine, ma solo le grandi linee di un procedimento logico-visuale, nei suoi momenti in qualche modo più intuitivi. Ancora una volta dobbiamo accontentarci della clausola, che discende dalla mentalità del contabile, secondo la quale nella normalità dei casi l'algoritmo dovrebbe convergere. Anche qui, considerazioni esterne al modello soccorrono nel mettere da parte problemi formali e di interpretazione⁷.

E' di nuovo interessante il confronto con Walras perchè questi, in effetti, oltre a "contare le equazioni", ha un secondo metodo per assicurarsi della esistenza delle soluzioni. E' questo il metodo del *tatōnnement*, che, nella struttura analitica degli *Elements*, svolge una funzione a dir poco ambigua: da una parte, ha quella di descrivere una mimica del processo di aggiustamento reale, dall'altra quella di fornire un metodo di calcolo effettivo delle soluzioni della cui esistenza dovremmo essere già sicuri in base al criterio del conteggio. Ovviamente, quale delle due funzioni fosse prevalente, almeno nelle intenzioni di Walras stesso, è difficile sapere. Nella letteratura del dopoguerra, informata allo spirito delle *Foundations of Economic Analysis*, l'aspetto di metodo di calcolo venne messo in soffitta, per così dire, e prevalse l'interpretazione dinamica. D'altra parte, dall'unica testimonianza in merito che abbiamo, quella di Schumpeter⁸, sembrerebbe potersi concludere che

prevalesse il primo aspetto (e ciò in un certo senso si comprenderebbe più facilmente).

Se si accetta la nostra interpretazione, si può descrivere il *tatōnnement* come un processo iterativo per approssimare la soluzione di equilibrio, la cui tecnica assomiglia molto ai procedimenti di triangolazione delle equazioni algebriche ben noti nell'ottocento, all'epoca di Walras. Anche questo quindi, congiura a far ritenere che il modello di riferimento di Walras fosse appunto quello algebrico⁹. Si può controllare nella letteratura che il procedimento dimostrativo in voga prevedeva in generale, proprio come in Walras, due momenti: il conteggio delle equazioni e un procedimento iterativo nella forma di algoritmo. Le due cose non erano separate, concettualmente si integravano a vicenda¹⁰. Possiamo identificare nel secondo momento la parte costruttiva della prova di esistenza di un equilibrio. Non si trattava di procedimenti matematicamente generali, nè erano volti ad ottenere risultati generali: erano mezzi euristici per stabilire l'efficacia di un modello formale come descrizione, il che evidenzia una concezione profondamente diversa da quella moderna del rapporto tra teoria e sua espressione formale.

Tale tradizione matematica giunge fino alle soglie degli anni '30, e solo allora viene rimessa in discussione. E' in quegli anni che si "canonizza" il processo di dimostrazione, ma la revisione critica che vi conduce nasce da un malinteso e lo sfrutta per operare un mutamento profondo

nei canoni stessi della ricerca teorica in economia. Il tema della dimostrazione matematica diviene infatti il veicolo dell'affermazione anche in economia di canoni scientifici che vengono elaborati al suo esterno. Il risultato finale di tale processo fu la precisazione dell'equilibrio generale come "core" del programma di ricerca microeconomico o neo-walrasiano. Ripercorrere quindi il dibattito sul tema della dimostrazione di esistenza permetterà di ricostruire almeno nelle sue grandi linee questo processo di trasformazione. A cinquant'anni dalla sua attuazione, è stato dimenticato il dramma connesso alla sua forzata introduzione in un ambiente teorico che gli era del tutto estraneo.

Usciremo da questa breve ricostruzione con l'evidente impressione che Produzione di Merci rappresenta una reazione, dal punto di vista della struttura formale e della tecnica di dimostrazione, a tale trasformazione recente, e non tanto e solo al marginalismo classico.

§.6 - Il dibattito sulla teoria dell'equilibrio economico generale negli anni trenta ha Vienna come scenario culturale e geografico e si svolge, come è ben noto, nell'ambiente degli economisti e matematici raccolti intorno alla personalità di Karl Menger, figlio del Menger della prima generazione austriaca. Un ambiente, questo, fortemente legato all'altro, vero e proprio centro della vita culturale viennese di quegli anni, il Wiener Kreis, culla del neo-positivismo logico. I protagonisti della nostra breve storia

sono Menger e Wald, anche se, come ho premesso nella introduzione, qui entra von Neumann.

Il punto di partenza del gruppo viennese è la critica alla versione semplificata della teoria dell'equilibrio economico generale proposta da Cassel¹¹: tale critica si appunta, non sul contenuto euristico del modello, ma sulla insufficienza del metodo di Cassel di stabilire l'esistenza di un equilibrio; e questo non sembra essere molto casuale, dato lo abito mentale dei suoi componenti.

Ovviamente, come è anche il caso di Walras, il modello di Cassel è nonlineare per la presenza di funzioni di domanda non-lineari nei prezzi, per cui il metodo del conteggio delle equazioni non è nè necessario nè sufficiente a stabilire la esistenza di soluzioni matematiche, tanto meno di soluzioni ristrette nel segno come debbono essere quelle economiche. Abbiamo già notato come Walras fosse in qualche modo consapevole di tale difficoltà e avesse cercato di porvi rimedio con l'algoritmo implicito nel processo di tâtonnement. Anche Cassel integrava il conteggio delle equazioni con un metodo iterativo di calcolo, come può scoprire chiunque si prenda la pena di dare un'occhiata al capitolo IV, volume I del suo The Theory of Social Economy. Inoltre, nello scrivere le equazioni del suo modello, implicitamente introduceva l'ipotesi che si conoscessero già quali fattori di produzione fossero scarsi.

Equivocando sulla dimostrazione di Cassel, i viennesi rilevarono una cosa ovvia: che il numero delle equazioni po-

teva pur risultare sufficiente ad assicurare l'esistenza di una soluzione, ma questa non avrebbe in generale soddisfatto al requisito della nonnegatività e perciò non avrebbe potuto rappresentare un equilibrio. Per escludere questa possibilità occorreva riformulare tutto il modello e ovviamente, il punto debole della costruzione di Cassel era nell'ipotesi che i fattori di cui si scrivevano le equazioni fossero già (prima della determinazione dell'equilibrio) quelli scarsi. Scarso è un fattore che in equilibrio risulta tale. Sulla base di questa osservazione siamo arrivati alla prima dimostrazione "vera" di esistenza nella storia della analisi economica: per ottenere questa dimostrazione, i fattori scarsi dovevano essere trattati anch'essi come un'incognita. E' evidente che abbiamo dovuto introdurre un elemento concettualmente estraneo all'apparato analitico di Cassel (e da questo punto di vista, di Walras): la nozione di fattore come termine primitivo, di natura tecnologica, mentre in Cassel fattore è sempre coniugato con il termine scarso, e quindi è sempre un fattore già economico, in senso proprio. Quanto viene guadagnato in generalità viene tuttavia ottenuto a spese del contenuto intuitivo dei termini. La presenza infatti in Cassel di quell'ipotesi chiarisce come i dati non siano i dati di un problema formale, ma dati economicamente rilevanti, come vengono concettualizzati a partire dalla percezione di un sistema economico reale in atto. L'uso, invece, del termine 'fattore' come termine primitivo, si accompagna allo svuotamento del suo contenuto economico: ciò

altera la struttura della teoria. Questa si automatizza in qualche modo dal suo sostrato empirico e dovrà allora trovare una giustificazione innanzitutto al suo interno: essa può risiedere solo nella prova della sua non interna contraddittorietà. La soglia del "percepibile" viene spostata ad un momento antecedente alla formalizzazione o ad un momento ad essa successivo, ma non deve comunque limitare in alcun modo la generalità della formalizzazione stessa; per ottenere ciò dev'essere concepita come del tutto esterna.

Vediamo così perchè emergono logicamente, all'interno dell'analisi economica, due requisiti paralleli che le erano estranei: quello della "rigorosità" e quello della non "contraddittorietà" della struttura. In questi termini, la scelta è culturalmente quasi obbligata: a presidio della rigorosità, si introduce la forma assiomatica¹², come era stata elaborata dalla scuola matematica più in voga all'epoca. In questo modo, il gruppo di Vienna approda, almeno per l'analisi economica¹³, al formalismo matematico. Ma questo non chiarisce ancora perchè la prova di esistenza sia del tipo che conosciamo bene.

In economia, la prova di esistenza di un equilibrio è stata intesa nel senso restrittivo di prova della non contraddittorietà all'interno di un qualsiasi sistema formale e deve svolgere il ruolo dell'analoga prova che si deve dare nei sistemi assiomatici in matematica ed in logica.

La dimostrazione canonica, di natura topologica, ha perciò un pattern che prevede un insieme di passi volti a

mostrare come la non esistenza di un equilibrio conduca ad una contraddizione con almeno una delle ipotesi del modello. Non fa nulla di meno ma anche nulla di più: non è di tipo costruttivo¹⁴. E' questa in sintesi la differenza della dimostrazione moderna dagli accenni di dimostrazione di Walras, di Cassel e, abbiamo detto, di Sraffa. Ovviamente, tecnicamente una tale dimostrazione è possibile solo all'interno di strutture logiche complete e perciò chiuse.

L'analisi dell'equilibrio economico generale vi è giunta tramite, non semplicemente l'assiomatizzazione, ma l'assiomatizzazione del suo impianto come struttura teorica chiusa.

Una volta scelta questa strada, il processo va avanti rapidamente: la prima prova secondo i canoni del formalismo appare ben presto (A. Wald, 1936); più o meno negli stessi anni, von Neumann dà anch'egli una dimostrazione di esistenza per un modello di produzione e di crescita nel quale il fenomeno produttivo era assiomatizzato secondo lo schema concettuale che fu in seguito sviluppato dall'activity analysis.

Nell'arco di un decennio, in tal modo si precisava la problematica ben nota della esistenza di un equilibrio; si cristallizzavano contemporaneamente i requisiti logico/deduttivi che una dimostrazione doveva soddisfare per essere accettabile. Il criterio di accettabilità era tuttavia così stabilito da essere di fatto compatibile solo con una maniera di fare teoria economica: quella che si basa sull'elabo-

razione di strutture assiomatizzate facilmente assoggettabili al controllo della loro interna non contraddittorietà¹⁵.

La canonizzazione di tali principi si ritrova in un bell'articolo di Menger (Menger, 1936), che è interessante perchè, per la prima volta, emerge la bi-partizione tra struttura formale e regole di corrispondenza o di applicazione empirica di una teoria tipica dell'empiricismo moderno.

In tale articolo, si riconosce la separazione della meta-economia, che è lo studio delle "relations between the statements of a theory" dalla questione della rilevanza empirica delle proposizioni così ottenute¹⁶. Una proposizione di esistenza è parte quindi non dell'economia ma della meta-economia, parafrasi della definizione di Hilbert.

Insieme alle pagine introduttive di Theory of Games di von Neumann e Morgenstern, l'introduzione di Menger al suo articolo costituisce una delle più lucide e coerenti dichiarazioni di un programma scientifico nel momento della sua formazione¹⁷.

§.7 - Alla fine di questo breve detour nella storia della dimostrazione di esistenza, che abbiamo tagliato ai primordi perchè il lettore può trovarne gli sviluppi successivi nell'articolo di R. Weintraub (1983), possiamo tornare a Sraffa con la sensazione almeno, se non la convinzione, che nemmeno da un punto di vista formale il suo metodo sia nuovo, bensì si trovi radicato in una tradizione, che accomuna Sraffa ai neo-classici del secolo scorso, mentre se ne

pongono fuori programmaticamente i moderni teorici dell'equilibrio economico generale¹⁸.

Il criterio di distinzione che abbiamo individuato è di carattere puramente formale e appare quindi estraneo all'analisi economica in quanto tale.

Sarebbe solamente formale, però, se non rivelasse concezioni opposte di fare teoria (una che potremmo definire "empirista" in senso lato, l'altra formalista perchè derivata dal formalismo in senso proprio), alle quali corrispondono due differenti criteri di accettabilità dei procedimenti logici (quello della dimostrazione computazionale o costruttiva, quello della dimostrazione per contraddizione o dimostrazione formalista). Il nostro criterio apparentemente tecnico nasconde quindi un contenuto ben preciso.

La tesi che sosteniamo non dovrebbe risultare in sè sorprendente: durante tutto l'arco della sua evoluzione, l'analisi economica non ha fatto altro che importare modelli scientifici, prima la medicina ed in particolare l'anatomia; poi, la meccanica dei corpi rigidi. Quello che si è scarsamente notato, è che ciascuno di questi modelli aveva un suo equivalente formale, un modello matematico in senso lato e che il processo di importazione era anche un processo assai delicato di assimilazione del modello formale e di suo adattamento al contenuto dell'analisi specifica. Ovviamente, come spesso avviene in questi casi, la ristrettezza del modello formale interagiva con la percezione di quello che si riteneva fosse compito e ambito dell'analisi economica, e spesso le

'lenti' formali imponevano che di tutto si ritagliasse solo la parte che poteva essere accomodata dal modello.

Rispetto al passato, quello che avvenne negli anni trenta fu per molti aspetti diverso: innanzitutto, il mutamento di canone o di modello di riferimento avveniva nello stesso tempo in (tutte o quasi) le scienze. Dall'altra, il nuovo canone veniva importato direttamente dalla problematica della matematica del tempo, una matematica che programmaticamente pretendeva di rendersi autonoma da ogni ispirazione empirica e di porsi non come ancella ma come forma astratta alla base di tutte le scienze naturali. L'unico referente nelle scienze naturali che l'economia potesse trovare per controllare la bontà del programma formalistico, era la meccanica quantistica, ma non era un buon referente: essa infatti non aveva raggiunto lo stadio di maturità della meccanica classica quando Walras la studiava sul trattato di Poisson, era piuttosto un 'boiling pot' negli stessi anni in cui lo era l'economia. Qui le incertezze dei primi passi furono poste di lato: la problematica collegata alla prova di esistenza svolgeva storicamente il ruolo di strumento per Monster-barring¹⁹ contro la (ri-)emergenza dello spirito empirista (come la recensione di Morgenstern a Hicks rende palese).

Analizzata in questa prospettiva, la tecnica di Sraffa, si rivela esplicitamente come un episodio della resistenza contro l'affermazione del paradigma formalista, un episodio, che si ricollega da un lato alla tradizione empirista prece-

dente, dall'altra alle correnti di pensiero che in questo secolo hanno rifiutato l'ideale della scienza come sistema formalmente autosufficiente.

Per tali motivi, non troviamo nel tessuto formale di Produzione di Merci nessuno degli ingredienti tipici di un modello, ed innanzitutto manca l'assiomatica. Il tessuto matematico è più "povero" di quello di un modello tipico dell'analisi dell'equilibrio economico generale: in particolare, manca la grande scoperta del pensiero neo-classico degli anni '30, quella teoria della dualità che è alla base della nozione stessa di equilibrio e della sua determinazione. Non abbiamo ancora discusso se, oltre a riflettere i legami con una tradizione, tutto ciò non sia anche il prodotto di una scelta moderna cosciente. Gli strumenti analitici sono elementari perchè la struttura del 'modello' è elementare, più elementare e meno ricca di quella che richiederebbe un modello neo-classico, nel quale oltre agli assiomi occorre specificare anche le leggi generali che producono certi comportamenti. Possiamo allora ragionare nel seguente modo proprio partendo dall'osservazione che in Sraffa non si ritrova mai una dimostrazione di esistenza nel senso moderno del termine.

Abbiamo visto che una tale prova ha lo scopo di dimostrare la significatività interpretata come non contraddittorietà tra gli assiomi e postulati, nonchè le regole di composizione che costituiscono l'ossatura del modello in quanto entità formale. Si può allora innanzitutto interpretare la

sua assenza come riflesso del fatto che la significatività viene introdotta nell'analisi attraverso un altro o altri, molteplici canali: a leggere con attenzione il testo, essa sembra esser garantita dall'ipotesi che la struttura formale semplicemente rappresenta una trascrizione simbolica di una situazione reale, di un'osservazione in senso lato. Quella proposta da Sraffa è quindi una situazione 'normale', che tutti siamo in grado di sperimentare. In tal modo, termini quali metodo di produzione, sistema, merci, che sono il lessico fondamentale del nostro, hanno solo bisogno di essere rappresentati simbolicamente, non di essere definiti attribuendogli proprietà astratte. Quindi il problema della (non-)contraddittorietà interna non emerge nella misura in cui, dato il carattere dell'esercizio, non si ottiene alcun modello formale: la struttura si basa su un certo sostrato di percezione empirica, che condiziona completamente e dallo inizio l'interpretazione dei termini non logici; dall'altra parte, le operazioni che si compiono sui dati hanno un loro significato immediato perchè sono le operazioni della pratica contabile²⁰. Per questo insieme di motivi la 'struttura' è concettualmente aperta ad entrambe le estremità, non occorrono allora nemmeno regole di traduzione per ottenere una interpretazione.

Tutto ciò chiarisce che, almeno nelle intenzioni, il sistema di Sraffa non ha nulla nè del modello formalistico assiomatizzato, nè della "teoria parzialmente interpretata". Che cos'è allora? La discussione sulla matematica di Sraffa

ci conduce ad affrontare almeno brevemente questo problema prima di concludere.

§.8 - Per comprendere l'analisi di Produzione di Mercati come intelaiatura formale di definizioni (eventualmente implicite) e di proposizioni positive occorre partire da una ipotesi nuova sul significato e la estensione della proposta culturale ivi contenuta.

Purtroppo sull'estensione teorica e le 'ambizioni' di quell'analisi non sembra esservi nè chiarezza nè accordo: da ciò deriva una certa ambiguità nelle posizioni di chi pure dice di riconoscersi, rispetto ad alcuni teoremi della analisi neo-classica moderna. Il problema sembra scaturire dal fatto che, molto semplicemente, all'approccio dell'equilibrio al quale siamo avvezzi (equilibrio in un senso o nell'altro), un approccio che si sostanzia in un arcipelago di modelli, Sraffa veramente contrappone un'altra cosa: forse l'unica definizione è quella di esperimento mentale, perchè segue quasi canonicamente le "istruzioni per esperimenti mentali" elaborate da Kuhn (1977). Se ciò è vero, allora ci viene proposto un momento di autocoscienza scientifica e non una teoria, nè i suoi prodromi. La funzione dell'esperimento è altra: principalmente quella di far riflettere il praticante della scienza sulle contraddizioni che l'uso di un certo apparato analitico e di certe categorie comporta, dall'altro, eventualmente suggerire, in negativo, un modo diverso di interpretare la realtà²¹. In quan-

to tale, non propone una nuova interpretazione dei fenomeni, ma può aprirvi la strada. In quanto autoriflessione, lo esperimento ha automaticamente generato, quasi fosse un caso di produzione congiunta, le proposizioni tanto amplificate di critica alla teoria del capitale.

Problema aperto è rimasto quello di comprendere il contenuto negativo cui si accennava, il messaggio critico è stato il solo ad essere percepito. L'assenza di Sraffa di un'interpretazione spiega la varietà dei suoi interpreti, e spiega anche perchè tanta parte della letteratura si sia limitata ad interpretare o a completare l'esercizio, che invece ovviamente, è o dovrebbe essere solo una parte del contenuto dell'esperimento mentale. Poca attenzione si è dedicata al compito positivo di sviluppare il necessario apparato analitico. Purtroppo solo scopo del Preludio è rigorosamente quello di fornire un'introduzione ed un esercizio mentale, la cui interpretazione ed estensione vengono lasciati ad altri. Il lettore trova poco più di questo, anche se insieme ad un apparato logico-concettuale mirabile di cui abbiamo cercato di stabilire il significato.

La novità dell'esperimento risiede nel fatto che, coerentemente al punto di vista osservativo, come viene definito altrove, non si fanno ipotesi sulle (o meglio, sulla conoscenza delle) leggi che regolano le variazioni delle quantità (in altre parole, sulle funzioni della produzione). Ciò è, ovviamente, dal punto di vista della modellistica corrente, una limitazione dell'analisi, perchè preclude la

spiegazione del perchè certi stati vengano osservati in base a leggi generali e formalizzate²².

Nella logica della analisi neoclassica dell'equilibrio economico generale, infatti, è tecnicamente impossibile procedere al di là dei termini primitivi senza introdurre una qualche ipotesi su tali leggi. La deficienza di tali leggi in Sraffa non implica a rigore che, per rendere operativo il 'modello', sia necessario introdurre l'ipotesi che i rendimenti di scala siano costanti. Al più, significa che il mondo della tecnologia richiede un'analisi più profonda di quella che i teorici abbiano fino ad ora ritenuto opportuno svolgerne. Il problema che rimane aperto, non è quindi quello se Sraffa abbia o meno bisogno di una o di quella specifica ipotesi sui rendimenti (nell'ambito angusto del suo esperimento mentale, il problema non si pone), ma se sia o meno necessario sviluppare descrizioni meno semplicistiche del sistema produttivo. Se vi è un contributo di Sraffa alla teoria moderna, questo può solo consistere nell'indicazione di una direzione teorica da sperimentare, di cui si propongono solo i risultati preliminari e non conclusivi. Questa osservazione indica il legame dell'euristica "negativa" di Produzione di Merci con quegli sforzi di ricerca che dalla constatazione dell'inerente povertà della descrizione neo-classica, sia marginalista che moderna, sono partiti per una esplorazione coraggiosa del mondo della tecnologia (si pensi a Georgescu-Roegen o a Hicks di Capitale e Tempo). Nell'interpretazione di Sraffa è risultata, invece, più po-

polare l'altra strada, quella di vedervi un continuatore dei classici. Tale strada ha implicato il rifiuto di prendere atto dell'evoluzione del pensiero neo-classico, e di confrontarsi apertamente con questa.

L'esperimento mentale avrebbe dovuto forzare a ripensare il modo di fare teoria, il repertorio di ingredienti e strumenti della 'teoria economica' in generale, e non solo del 'marginalismo' e a ripensare quel metodo dell'equilibrio che, si è detto, richiede strumenti di tale tipo: la 'visione', non predomina sul metodo nè sugli strumenti che la dovrebbero rappresentare a tal punto da poterne essere separata.

Sraffa dimostra una coscienza più alta dell'unità di metodo e contenuto, ed è coerentemente anti-formalista. Il rifiuto di ricorrere alla teoria degli operatori lineari è una scelta coerente dell'apparato formale giusto con l'insieme di ipotesi sotto le quali l'esperimento mentale viene proposto. Effetto collaterale di tale scelta è proprio la impossibilità di ricorrere alle proposizioni sintetiche (i teoremi) di quella teoria matematica e la necessità di inventare procedure di dimostrazione più laboriose.

Siamo ritornati così al modo "euristico" di Sraffa di provare le sue proposizioni; ma contro l'opinione diffusa, vogliamo insinuare il dubbio che questo possa essere un modo adeguato di provarle, e che, per di più, esso risulti essenziale nella misura in cui mette in evidenza (nel processo stesso di dimostrazione) il senso ed i limiti dell'operazione logica che si sta compiendo. E' a questo punto che si

comprende come, anche in Sraffa, la critica per esperimento mentale (e non tramite un modello assiomatico alternativo) si accompagna naturalmente ad uno stile costruttivo di dimostrazione. Nel nostro troviamo un buon esempio di quella dimostrazione non formale di cui parla Lakatos (in particolare, di quelle "prove" pre-formali che sarebbero il veicolo degli esperimenti mentali), mentre in generale, si ritiene ormai che l'unico tipo di dimostrazione 'rigorosa' sia quella che si conforma ai canoni del formalismo (la prova 'formale'). Se per prova rigorosa si intende solo quella che dà una sequenza di assiomi ed ipotesi e ne deduce le implicazioni, si è visto che sicuramente non la si può trovare in Sraffa. Ma questo non è nemmeno l'unico pattern di dimostrazione logicamente disponibile né lo è stato nello sviluppo storico della matematica. Lakatos ha fatto molto per rivalutare la dignità scientifica delle dimostrazioni non formali, e per sottolineare l'utilità come veicolo per l'introduzione di una vena di empirismo nella matematica.

E' forse preferibile citare: "Abbiamo visto che le dimostrazioni matematiche sono essenzialmente di tre tipi: preformali; formali; post-formali. In qualche modo, la prima e la terza provano qualcosa riguardo quel contenuto a volte chiaro ed empirico, qualche volta vago e 'quasi empirico', che costituisce il soggetto vero anche se piuttosto elusivo della matematica. A tale tipo di dimostrazione è sempre associata dell'incertezza, legata a possibilità non ancora pensate. Il secondo tipo di dimostrazione matematica

è assolutamente affidabile; è un peccato che non sia del tutto chiaro - anche se lo è approssimativamente - in merito a che cosa sia affidabile."²³

Per concludere: vi è una sorta di controesempio all'affermazione secondo la quale Sraffa non controlla la teoria matematica moderna che semplificherebbe la derivazione delle sue proposizioni. Nonostante i ringraziamenti per l'aiuto che gli hanno offerto eminenti matematici come F. Ramsey, A. Watson e A.S. Besicovitch, abbiamo visto che coerentemente in nessuna parte del suo libro Sraffa adotta un apparato matematico più complesso dell'algebra elementare. L'uso di strumenti più moderni avrebbe semplificato grandemente l'esposizione, ed è per tale motivo che è giustificato insegnare le stesse proposizioni nelle nostre università nella maniera che usiamo; ma dovrebbe esser sempre chiaro che questa è una maniera di illustrare la teoria degli operatori lineari, non la "teoria" di Sraffa. Il ricorso a tali metodi avrebbe comportato implicitamente l'accettazione dell'ipotesi di linearità (rendimenti di scala costanti) e snaturato il messaggio più importante implicito nel Gedankexperiment; dall'altro avrebbe resa più confusa la distanza tra l'operazione proposta da Sraffa e quelle di Von Neumann e di Leontief e, insieme a questi, dell'esercito di economisti aderenti al programma scientifico del formalismo.

Le sorti di tale programma scientifico, di importazione nella teoria economica, non sono più chiare nemmeno nell'ambito della matematica in cui è stato concepito; ed è ormai ben noto che ampia è la schiera di quanti in maniera più o

meno programmatica sono stati e sono contro tale programma: matematici della vecchia tradizione pre-hilbertiana, come Kronecker e Jordan, e della nuova (Brouwer, Heyting, Borel, per citare solo alcuni); fisici matematici come Herman Weyl, e molti filosofi tra cui proprio quel Wittgestein che dimostrò sempre simpatie per il costruttivismo. E' in questo vasto movimento di pensiero, ora più vivace che mai (e al quale aderì alla fine anche l'ex formalista Von Neumann) che dobbiamo forse trovare l'ispirazione alla scelta di quello 'stile costruttivo' che è proprio di Sraffa (e non di Debreu).

L'analisi di Produzione di Merce è frutto di una scelta precisa che l'accosta ai tentativi di questo secolo di combattere il programma della restaurazione della 'razionalità classica', chiusa in se stessa, della cui crisi parlano da tempo i filosofi: solo in questa luce se ne possono comprendere e valutare il significato e la portata.

NOTE

(*) Presento qui una rielaborazione del testo del mio intervento con una aggiunta essenziale, costituita dalla breve storia dell'evoluzione dei metodi matematici in economia. Una versione ampliata di tale sezione è stata presentata al workshop diretto da A. Leijonhufvud al Department of Economics dell'Università di California, Los Angeles, nello aprile 1983. Per commenti e suggerimenti, debbo perciò ringraziare A. Leijonhufvud, R. Clower e D. Friedman, e in genere i partecipanti alla discussione. Per l'ispirazione a guardare nella matematica di Sraffa in un modo poco ortodosso è responsabile M. De Cecco, il quale me la suggerì in una conversazione a Perugia alcuni anni orsono. In tempi più recenti, il mio amico K. Velupillai, dell'Università Europea di Firenze, mi ha aiutato a trovare una linea interpretativa all'interno di un argomento decisamente complicato. Senza il suo aiuto, le sue critiche, il suo contributo positivo, questo saggio non sarebbe nato. Tuttavia, questa è pur sempre la mia visione del problema. Debbo ringraziare i partecipanti alla conferenza ed in particolare, G. Becattini (per un'utile osservazione), B. Guinness e, infine, R. Skidelski per una lunga ed illuminante conversazione. I ringraziamenti si estendono a B. Miconi, U. Pagano e F. Di Brisco, che hanno letto e utilmente commentato varie versioni dell'articolo.

(1) Vedi Sraffa (1960), par. 50, nota 2. Questa e la nota a pagina 6, contengono le due affermazioni più oscure, almeno secondo i canoni tradizionali, che si ritrovano in Sraffa. (Per la discussione dell'ipotesi a p. 6, mi si permetta di rinviare al mio (1984).)

(2) Ovviamente, è lineare anche nel saggio di salario reale misurato in termini di un bene preso come numerario. Ciò vale anche nel caso in cui il saggio salario nominale sia posto uguale ad uno e i prezzi determinati in termini di "lavoro comandato". (Implicitamente tale procedimento determina il saggio di salario reale espresso come il reciproco del prezzo di una merce qualsiasi.) Dovrebbe perciò essere chiaro che la linearità o meno del sistema di equazioni non dipende dalla scelta del numerario, ma da quella della variabile esogena. La scelta finale di Sraffa in favore del saggio di profitto (scelta alla quale rimane coerente dal par. 44 in poi) è sicuramente fondata su considerazioni di natura economica, ma ha anche il ruolo di scelta strategica per ottenere un procedimento standard basato su di un problema in forma lineare. Ciò non dovrebbe indurre, come spesso accade, in una confusione tra la natura del problema e il modo in cui viene trattato: sistemi di equazioni algebriche non omogenei ma sotto-determinati, come è qui il caso, implicano sempre una forma di non linearità. (Si ricordi che, quando il sag-

gio di salario viene trattato come esogeno, nel cap. III, Sraffa non discute di esistenza di soluzioni, ma del comportamento del saggio di profitto al variare del salario: fa in altre parole statica comparata, assumendo implicitamente che esista una soluzione in corrispondenza di ciascun valore ipotizzato della variabile esogena.)

(3) Le complicazioni che nascono possono essere indicate brevemente. Sia dato un saggio di salario nominale, $w=\bar{w}$, le incognite sono allora il vettore dei prezzi p e il saggio di profitto r . Sia la merce 1 il numerario, $p_1=1$. Per ogni vettore \hat{p} di prezzi in termini del numerario, ovvero per ogni vettore \hat{p} nell'insieme

$$P = \left\{ \hat{p} \in \mathbb{R}^{n-1} \mid \hat{p}_j = p_j/p_1, p_j \geq 0, j = 2, \dots, n \right\}$$

i saggi di profitto r_j nelle varie industrie saranno generalmente differenti. Per ogni $\hat{p} \in P$ otterremo allora un vettore $r = r(\hat{p})$, dove r_j è il saggio di profitto nell' i -esima industria corrispondente al vettore dei prezzi \hat{p} . La soluzione delle equazioni dei prezzi di produzione, dato il saggio di salario nominale, è un vettore di n componenti $(\hat{p}, 1)$ più un unico saggio di profitto r (se esiste) che è a sua volta funzione di p . Considerazioni topologiche non elementari sono tuttavia necessarie per trattare il problema: come si dirà nel seguito del testo, per poter introdurre tali considerazioni si introduce normalmente una struttura topologica sui parametri della matrice dei coefficienti, ma questa è estranea al tessuto analitico di Produzione di Mercè.

(4) E' ben noto che i due filoni cui si accenna nel testo sono andati nell'ottocento in due direzioni diverse: il primo, infatti, (quello delle equazioni polinomiali) si è dovuto rassegnare all'impossibilità di ottenere una soluzione esplicita (per mezzo dei radicali) delle equazioni di ordine superiore al quarto. Il risultato ultimo fu perciò il teorema gaussiano, noto come teorema fondamentale dell'algebra, che asseriva che soluzioni dovevano esistere nel campo complesso anche se un metodo esplicito di calcolo non era disponibile. Questo è stato forse il primo di una serie di risultati di esistenza puramente qualitativi ad apparire nella storia della matematica. Ciò aprì la strada alle ricerche di Sturm ed altre volte a locare le radici se non a calcolarle esattamente. Il requisito della calcolabilità, d'altra parte, rimase patrimonio quasi esclusivo della teoria ottocentesca dei sistemi di equazioni lineari; e questo almeno fino all'assiomatizzazione dell'algebra lineare che, generalizzando l'idea di trasformazione di coordinate, ne faceva il perno della teoria formalista degli operatori lineari. Questa fu sviluppata all'inizio del nostro secolo da Hilbert nelle sue ricerche sulle equazioni integrali, per essere poi generalizzata ed applicata sia alla

quantistica che all'economia da J. von Neumann: essa si incentra sulla analisi delle proprietà degli operatori lineari, ciascuno dei quali è sintetizzato dal corrispondente spettro (insieme di autovalori). I teoremi legati ai nomi di Perron e di Probenius sviluppano tale analisi nell'ambito ristretto di una classe di matrici (quelle nonnegative) o classe di operatori monotoni in uno spazio di dimensione finita e, come è ben noto, sono diventati il "box of tools" per la trattazione dei modelli lineari di produzione.

(5) Si vedano in particolare i paragrafi iniziali del capitolo sulla produzione congiunta. Probabilmente tale punto di vista contabile è proprio all'origine dell'affermazione tipica di Sraffa, secondo la quale la produzione congiunta è solo "il genere del quale il capitale fisso è la specie principale". (Sraffa (1960), p. 63.)

(6) Vedi per esempio, Hilbert: "The value of pure existence proofs consists precisely in that the individual construction is eliminated by them, and that many different constructions are subsumed under one fundamental idea so that only what is essential to the proof stands out clearly; brevity and economy of thought are the *raison d'être* of existence proofs. . . . To prohibit existence statements . . . is tantamount to relinquishing the science of mathematics altogether" (citato in Reid (1970), p. 37). Ovviamente si poteva anche osservare, come qualcuno ha fatto, che "There is an essential difference between proving the existence of an object of a certain type by constructing a tangible example of such an object, and showing that if none existed one could deduce contrary results. In the first case one has a tangible object, while in the second one has only a contradiction" (loc. cit., p. 36). D'ora in poi, per sottolineare il diverso contenuto informativo, parleremo per brevità di "dimostrazioni di esistenza" in contrapposizione a dimostrazioni per costruzione (o "costruttive") (v. nota 14).

(7) In questo caso, l'ipotesi secondo la quale la configurazione riflessa nei dati è "normale", è ben più difficile da interpretare, come ha potuto sperimentare chi si è cimentato con il problema della merce-tipo nel caso di produzione congiunta.

(8) "I remember a conversation with Walras in which I tried but completely failed to elicit the slightest symptom of interest both in dynamical approaches and in the theory of economic evolution" (Schumpeter, Storia). E' sulla base della stessa affermazione di Schumpeter, che Goodwin (1953) sostiene che il *tatōnement* è un procedimento di calcolo.

(9) Se Walras aveva veramente in mente un procedimento di calcolo, doveva pensare che fosse analogo a quelli elaborati per i sistemi di

equazioni lineari. In effetti, solo in questo secolo siamo giunti alla soluzione numerica approssimata di sistemi non-lineari di grande dimensione, quale è quello Walrasiano, e per rendere ciò possibile occorre l'invenzione dei computers.

(10) Non sarà casuale che una parte della nascente letteratura sul socialismo avesse come tematica proprio quella della calcolabilità del punto di equilibrio, come risulta in particolare dalle posizioni di Barone e Lange.

(11) Il procedimento iterativo si svolge più o meno così: dato che i fattori sono per ipotesi scarsi, le equazioni di domanda/offerta che vi si riferiscono determinano prezzi dei servizi tutti positivi; le equazioni dei prezzi dei beni finali danno allora prezzi pur essi positivi, dal momento che nella loro produzione almeno un fattore dev'essere impiegato. Inserendo i prezzi dei prodotti nelle equazioni di domanda/offerta dei beni finali si determina, infine, l'equilibrio sul loro mercato. Ovviamente, un tale ragionamento non porta necessariamente ad un "equilibrio". Si può infatti intuire che i prezzi dei servizi ipotizzati all'inizio di tutta la prima iterazione possano non essere tali da assicurare equilibrio sul mercato dei beni finali. Altre iterazioni sono perciò necessarie. Diversamente da Walras, quindi, Cassel sembra compiere un errore vero, quello cioè di pensare che una iterazione sia sufficiente. L'applicazione del teorema del punto fisso condensa concettualmente tutto il processo iterativo indicando sotto quali condizioni una soluzione debba esistere, ma senza descrivere come ci si arriva. Un tale risultato, pur sottintendendo un processo iterativo, non dà un metodo di calcolo e non è quindi costruttiva. (Per tale motivo, Brouwer arrivò a ripudiare il teorema che porta il suo nome perché in contraddizione con il suo approccio matematico; vedi Brouwer, 1976.) (Vedi nota 14.)

(12) Menger (1936); Von Neumann e Morgenstern (1944).

(13) K. Menger ed il Wiener Kreis in generale tennero sempre le distanze dal programma formalista ed espressero in varie circostanze un atteggiamento intermedio tra le tre correnti principali della matematica degli anni '30 (logicismo, formalismo ed intuizionismo). (Si vedano i saggi di Menger (1979) e quelli di Hans Hahn (1980).) Comunque, non potevano essere molto lontani dal punto di vista del formalismo, in quanto questo trattava la matematica come insieme di modelli formali assiomaticizzati.

(14) E' noto che parte del programma di Hilbert era quello di provvedere prove costruttive delle proposizioni fondamentali della mate-

matica. Egli fu, d'altra parte, l'inventore della dimostrazione pura di esistenza alla fine del secolo XIX con la soluzione di un problema nella teoria degli invarianti (la soluzione del problema di Gordon). (Di fatto, comunque importava nella matematica in generale un metodo che era tradizionalmente usato solo nella geometria di derivazione euclidea.) Nella visione di Hilbert, mentre la prova costruttiva doveva essere il mezzo per provare l'interna coerenza della matematica, (e quindi era lo unico tipo di prova accettabile nella meta-matematica), all'interno della matematica in quanto tale come insieme di strutture formali, una prova di esistenza non costruttiva era accettabile, anche se poteva essere preferibile una costruttiva. E' questa soglia di accettabilità che marca il contrasto con il costruttivismo, per il quale appunto una prova puramente esistenziale è priva di significato. Per tale motivo la prova esistenziale si può considerare tipica del formalismo. Alla base del contrasto vi sono ovviamente divergenze di filosofia della matematica, in particolare una diversa concezione della matematica, come "invenzione" umana (i costruttivisti, in particolare gli intuizionisti) o come scoperta (i formalisti).

(15) Tale modo specifico di costruire modelli assiomatici relega, come si è detto nel testo, il momento della significatività empirica della teoria o ad un momento antecedente la sua costruzione oppure successivo ma in qualsiasi caso ad un momento logicamente esterno. In contrasto, la geometria euclidea è stata per secoli l'esempio classico di modello assiomatico in cui assiomi e termini primitivi venivano immediatamente riempiti di contenuto intuitivo. A tale proposito, Lakatos distingue all'interno del deduttivismo il problema scientifico euclideo da quello empiricista, legato al neo-positivismo logico. L'esempio del programma euclideo dovrebbe convincere il lettore della possibilità di costruire una struttura assiomaticizzata sulla base di un'ispirazione diversa da quella del formalismo e del programma empiricista.

(16) Come dice Menger: "Finally, we emphasize that we attach little importance to the rather subtle logical relationships among the various laws about return. We believe the crucial issue for economics to be whether or not these laws are empirically confirmable while we regard it as a secondary issue whether or not they follow from certain other propositions. It is, rather, some outstanding economists who have raised this issue by claiming to prove the law of diminishing returns on land logically, and thereby to make empirical tests superfluous. All that we here say is that logical relationships, equivalences, deductions, proofs, etc. must be handled correctly" (Menger, 1936, p. 280).

Per la storia dell'analisi, occorre qui notare che il termine di paragone per il gruppo viennese è rappresentato dalle opere degli autori austriaci. La citazione precedente infatti si riferisce a certe affermazioni di Böhm-Bawerk; dall'altra parte, l'idea di scarsità e di fattore o bene libero che era pur presente in Walras venne ai viennesi, per loro dichiarazione, da C. Menger. Il gruppo attorno a Menger Jr. innestava la discussione delle incoerenze della vecchia scuola austriaca, divisa tra apriorismo e deduttivismo, su di un tessuto analitico, quale quello walrasiano-casseliano, che vi era del tutto estraneo.

(17) Non è casuale che un'interpretazione analoga del rapporto tra formalizzazione ed applicazioni empiriche si affermasse in quegli stessi anni per la meccanica quantistica, che anzi ne fu forse il primo esempio (v. Jammer (1974)). Come questa, anche la teoria economica tendeva a collocarsi come 'teoria empirica parzialmente interpretata'. La distinzione tra formalizzazione e insieme di regole di corrispondenza non faceva altro che giustificare quanto stava accadendo: quando nel 1932, apparve *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* di J. von Neumann, era la prima volta che nasceva una formalizzazione priva di giustificazione empirica o di interpretazione. Tale operazione fu un successo, ed in particolare fu considerato tale dai formalisti che credevano nel principio secondo il quale la formalizzazione viene fatta secondo sue regole interne e l'interpretazione appartiene ad un momento eventuale successivo. (Come dice chiaramente Bourbaki: "Dal punto di vista assiomatico, la matematica si presenta come un deposito di forme astratte: le strutture matematiche; ed accade così, senza che ne sappiamo il perché, che certi aspetti della realtà empirica si adattino a queste forme, quasi in virtù di una sorta di predisposizione" (N. Bourbaki, 1962, p. 231).)

(18) Un caso interessante di rifiuto di aderire ai canoni del nuovo "paradigma" o "programma di ricerca" è rappresentato da Valore e Capitale di J.R. Hicks. Pubblicato sul finire degli anni trenta, ancora vi si trovava il metodo del conteggio delle equazioni. L'opera provocò la reazione di Morgenstern che, in una recensione apparsa nel 1941, scrive: "Hicks' assertion is incorrect even from the point of view of history of doctrine. Moreover it is systematically incorrect because the determinateness of a system of equations does not necessarily depend only upon the equality of the number of unknowns with the number of equations. . . . We have as yet such (existence) proofs only for two systems of equations, those of von Neumann and of Wald." L'argomentazione di Morgenstern chiarisce bene il nuovo punto di vista ma anche

quello di Hicks e della tradizione cui Hicks era legato: afferma infatti che le vere difficoltà che emergono nell'analisi matematico-logica dei sistemi economici non possono semplicemente essere messe da parte con bella prosa e richiami al senso comune. Hicks comunque non ha mai cambiato punto di vista, nè alterato la sua dimostrazione di esistenza: uno sguardo alle appendici ai suoi ormai molti libri mostra come sia stato sempre coerente con quello che abbiamo definito punto di vista algebrico (un esempio evidente è l'appendice sulla produzione congiunta in Capitale e Crescita).

(19) L'espressione viene da Lakatos, che la usa per descrivere in maniera colorita una delle tecniche impiegate durante il processo di hardening del core di un nuovo programma scientifico. Non è comunque il caso qui di entrare nel merito del problema se l'equilibrio economico generale costituisca un programma scientifico oppure un paradigma. (Per una discussione dal punto di vista dell'approccio di Lakatos, si veda Latsis (1976), in particolare l'intervento di Leijonhufvud.)

(20) La migliore dichiarazione dell'empirismo sraffiano appare nello scambio di lettere con P. Newman (1970).

(21) Per un'interessante interpretazione comparativa dei meccanismi di aggiustamento di Walras e di Marshall come 'esperimenti mentali', si veda Leijonhufvud (1974).

(22) E' questa la differenza principale di tale tipo di empirismo da quello collegato alla visione neo-positivista. Comunque, la categoria di empirista è talmente sfumata, che almeno in Lakatos se ne possono ritrovare due accezioni, di cui solo una è quella tecnica più nota. Nel testo, dovunque, mi sembra di aver usato il termine empirismo e suoi derivati nell'altra accezione che forse è più vaga: non si capirebbe altrimenti perché solo i neo-positivisti possano essere empiristi nelle scienze applicate. (Per la seconda definizione di Lakatos, si veda "A Renaissance of Empiricism in Mathematics?" in Lakatos (1978).)

(23) Lakatos (1978), p. 69.

BIBLIOGRAFIA

- BOURBAKI, N. (1950), "The Architecture of Mathematics", in American Mathematical Monthly, 57.
- BOURBAKI, N. (1963), Elementi di Storia della Matematica, Feltrinelli, Milano.
- BOYER, C.B. (1980), Storia della Matematica, Oscar Mondadori, Milano.
- BROUWER, L.E.J. (1976), Collected Works, vols. I and II, North Holland, Amsterdam.
- BROUWER, L.E.J. (1983), Lezioni sull'Intuizionismo, Boringhieri, Torino.
- CROSSLEY, J.N. and others (1972), What is Mathematical Logic?, Oxford University Press, Oxford.
- GARGANI, A. (1980), Stili di Analisi, Feltrinelli, Milano.
- GOODWIN, R.M. (1951), "Iteration, Automatic Computers, and Economic Dynamics", in Metroeconomica, vol. III, no. 1.
- HAHN, H. (1980), Empiricism, Logic and Mathematics, edited by B. McGuinness, The Vienna Circle Collection, D. Reidel Publishing Co. (Dordrecht, Holland).
- HARDY, G.H. (1928), "Mathematical Proof", in Mind, vol. XXVIII.
- HICKS, J.R. (1938), Capital and Value, Oxford University Press.
- JAMMER, M. (1974), The Philosophy of Quantum Mechanics, the interpretation of Quantum Mechanics in historical perspective, Wiley Inter-science, New York.
- KLINE, M. (1980), Mathematics, the loss of certainty, Oxford University Press, New York.
- KUHN, T. (1977), "A function for thought experiment", in Kuhn (1977).
- LAKATOS, I. (1978), "What does a Mathematical Proof prove?", in I. Lakatos, Mathematics, Science and Epistemology, Philosophical Papers, vol. 2, edited by J. Worrall and G. Currie, Cambridge University Press, Cambridge.
- LAKATOS, I. (1978), "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?", in I. Lakatos.
- LEIJONHUFVUD, A. (1974), Varieties of Price Theories, UCLA discussion paper.
- LEIJONHUFVUD, A. (1976), "Schools, 'Revolutions' and Research Programmes in Economic Theory", in S. Latsis (ed.), Method and Appraisal in Economics, Cambridge University Press (Cambridge: 1976); ristampato in A. Leijonhufvud (1981): Information and Coordination, Oxford University Press, New York and Oxford.
- MENGER, K. (1936), "Bemerkungen zu den Ertragsgesetzen", in Zeitschrift für Nationalökonomie (trad. inglese: "Remarks on the law of diminishing returns"), ristampato in Menger, K. (1979), Selected Papers in Logic and Foundations, Didactics, Economics, The Vienna Circle Collection, edited by H.L. Mulder, R.S. Cohen e B. McGuinness, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht.
- MORGENSTERN, O. (1941), "Professor J. Hicks on Value and Capital", in Journal of Political Economy, giugno, ristampato in Morgenstern, O. (1976), Selected Economic Writings, a cura di A. Schotter, New York University Press, New York.
- MUIR, Th. (1960), The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, ristampa, Dover Publications, New York.
- NEWMAN, P. (1962), "Production of Commodities by Means of Commodities", in Revue Suisse d'Economie Politique et de Statistique, vol. XCVIII, marzo.
- NEWMAN-SRAFFA (1970): scambio di lettere, apparso come appendice all'articolo di K. Bharadwaj: "On the Maximum Number of Switches Between two Production Systems", in Schweizerische Zeitschrift für Volkswirtschaft und Statistik, vol. CXVI, dicembre.
- PUNZO, L.F. (1984), Accounting Approach and Multisectoral Modelling, Pubblicazioni dell'Institut für Höhere Studien, Wien.

- REID, C. (1972), Hilbert, Springer Verlag, Berlin.
- SRAFFA, P. (1960), Produzione di merci a mezzo di merci, Einaudi, Torino (citazioni dalla seconda ristampa, 1972).
- von NEUMANN, J. (1932), Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Springer Verlag, Berlin; ristampato con il titolo (1955), Mathematical Foundations of Quantum Mechanics, Princeton University Press, Princeton.
- von NEUMANN, J. (1944), Theory of Games and Economic Behavior, Princeton University Press, Princeton.
- WEINTRAUB, E.R. (1979), Microfoundations of Macroeconomics, Cambridge University Press, Cambridge.
- WEINTRAUB, E.R. (1983), "On the Existence of a Competitive Equilibrium: 1930-1954", Journal of Economic Literature, vol. XXI, marzo.
- WEYL, H. (1972), "David Hilbert and his Mathematical Work", in Bulletin of the American Mathematical Society, 50, 1944 (ristampato in G. Reid).

ELENCO DEI QUADERNI PUBBLICATI

- N. 1. MASSIMO DI MATTEO
Alcune considerazioni sui concetti di lavoro produttivo e improduttivo.
- N. 2. MARIA L. RUIZ
Mercati oligopolistici e scambi internazionali di manufatti. Alcune ipotesi e un'applicazione all'Italia.
- N. 3. DOMENICO MARIO NUTI
Le contraddizioni delle economie socialiste: una interpretazione marxista.
- N. 4. ALESSANDRO VERCELLI
Equilibrio e dinamica del sistema economico-semanticamente dei linguaggi formalizzati e modello keynesiano.
- N. 5. A. RONCAGLIA-M. TONVERONACHI
Monetaristi e neokeynesiani: due scuole o una?
- N. 6. NERI SALVADORI
Mutamento dei metodi di produzione e produzione congiunta.
- N. 7. GIUSEPPE DELLA TORRE
La struttura del sistema finanziario italiano: considerazioni in margine ad un'indagine sull'evoluzione quantitativa nel dopoguerra (1948-1978).

- N. 8. AGOSTINO D'ERCOLE
Ruolo della moneta ed impostazione antiquantitativa in Marx: una nota.
- N. 9. GIULIO CIFARELLI
The Natural Rate of Unemployment with Rational Expectations Hypothesis. Some Problems of Estimation.
- N. 10. SILVANO VICARELLI
Note su ammortamenti, rimpiazzi e tasso di crescita.
- N. 10bis. LIONELLO F. PUNZO
Does the Standard System exist?
- N. 11. SANDRO GRONCHI
A Meaningful Sufficient Condition for the Uniqueness of the Internal Rate of Return.
- N. 12. FABIO PETRI
Some Implications of Money Creation in a Growing Economy.
- N. 13. RUGGERO PALADINI
Da Cournot all'oligopolio: aspetti dei processi concorrenziali.
- N. 14. SANDRO GRONCHI
A Generalized Internal Rate of Return Depending on the Cost of Capital.
- N. 15. FABIO PETRI
The Patinkin Controversy Revisited.
- N. 16. MARINELLA TERRASI BALESTRIERI
La dinamica della localizzazione industriale: Aspetti teorici e analisi empirica.
- N. 17. FABIO PETRI
The Connection between Say's Law and the Theory of the Rate of Interest in Ricardo.
- N. 18. GIULIO CIFARELLI
Inflation and Output in Italy: a Rational Expectations Interpretation.
- N. 19. MASSIMO DI MATTEO
Monetary Conditions in a Classical Growth Cycle
- N. 20. MASSIMO DI MATTEO - MARIA L. RUIZ
Effetti dell'interdipendenza tra paesi produttori di petrolio e paesi industrializzati: un'analisi macrodinamica.
- N. 21. ANTONIO CRISTOFARO
La base imponibile dell'IRPEF: un'analisi empirica.
- N. 22. FLAVIO CASPRINI
L'efficienza del mercato dei cambi. Analisi teorica e verifica empirica
- N. 23. PIETRO PUCCINELLI
Imprese e mercato nelle economie socialiste: due approcci alternativi.
- N. 24. BRUNO MICONI
Potere prezzi e distribuzione in economie mercantili caratterizzate da diverse relazioni sociali

N. 25. SANDRO GRONCHI

On Investment Criteria Based on the Internal
Rate of Return

N. 26. SANDRO GRONCHI

On Karmel's Criterion for Optimal Truncation

N. 27. SANDRO GRONCHI

On Truncation "Theorems"