

QUADERNI



Università degli Studi di Siena

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA POLITICA

Riccardo Bonci

Soluzione, "calibrazione" e simulazione
del modello standard di ciclo reale

n. 293 - Luglio 2000

Soluzione, “calibrazione” e simulazione del modello standard di ciclo reale

Riccardo Bonci¹

Università di Siena

Abstract

Il modello standard di ciclo reale (Prescott, 1986) è risolto numericamente con il metodo ricorsivo di Binder e Pesaran (1997). L’economia artificiale viene quindi “calibrata” sui dati USA (1954-1982) riorganizzati coerentemente con le variabili del modello base. Per valutare la capacità del modello di replicare le osservazioni storiche anche rispetto alla componente ciclica, si confrontano le proprietà statistiche delle serie simulate con i “fatti stilizzati” dell’economia degli Stati Uniti, calcolati sui dati detrendizzati con il filtro Hodrick-Prescott. I risultati indicano che, pur essendo una rappresentazione estremamente stilizzata della realtà economica, il modello si dimostra sorprendentemente capace di replicare le caratteristiche essenziali del ciclo economico osservato.

Classificazione JEL: E1, E3, C1.

¹ E-mail: bonci@libero.it. Ringrazio Riccardo Fiorito e Tryphon Kollintzas per il loro prezioso aiuto e gli utili suggerimenti su una precedente stesura. Ringrazio, inoltre, i partecipanti ai seminari presso il Dipartimento di Economia Politica dell’Università di Siena e l’Athens University of Economics and Business per il loro commenti. Sono, comunque, il solo responsabile degli eventuali errori ancora presenti nell’esposizione.

1. Introduzione

Dall'inizio degli anni '80 si è sviluppata la “teoria del ciclo reale”, in cui gli shock esogeni alla produttività totale dei fattori – misurati con i residui di Solow – sono identificati come la principale causa delle deviazioni del prodotto aggregato dal proprio sentiero di crescita di stato stazionario. La propagazione di questi shock nel tempo, responsabile dell'andamento ciclico comunemente osservato, è poi assicurata da vari meccanismi di dinamica endogena, come il processo d'accumulazione del capitale fisico, le preferenze intertemporali degli agenti per il consumo ed il tempo libero, o i tempi di completamento dei nuovi progetti d'investimento.

In questo studio si analizzano le varie fasi che portano alla definizione di un modello di ciclo reale capace di replicare le caratteristiche cicliche osservate nell'economia degli Stati Uniti negli anni tra il 1954 ed il 1982 – dati trimestrali. La serie dello stock di capitale, disponibile a frequenza annuale, è stata trimestralizzata utilizzando un metodo alternativo a quelli già impiegati, basato sulla proporzionalità rispetto alla spesa per investimenti registrata nel periodo precedente. Rispetto alla letteratura, inoltre, si ricorre ad una nuova metodologia per la soluzione del modello dinamico multivariato con aspettative razionali che risulta dalle condizioni di equilibrio, cioè al metodo “fully recursive” di Binder e Pesaran (1997), che consente di ottenere forme funzionali chiuse per le variabili di decisione, in funzione dello stato del sistema.

Si comincia presentando il cosiddetto modello “benchmark” di ciclo reale¹, con particolare riferimento alla metodologia della “calibrazione”, che simula il modello sulla base di pochi parametri ricavati dai vincoli del modello stesso, da informazioni a priori, o da risultati econometrici precedenti. Tale metodologia fu utilizzata per la prima volta da Kydland e Prescott nell'innovativo articolo del 1982, “Time to build and aggregate fluctuations” (*Econometrica*, 50) ed è ormai divenuta di uso comune nello studio delle fluttuazioni cicliche.

Il modello viene poi risolto, ottenendo regole di decisione esplicite ed invarianti nel tempo che guidano gli agenti nelle proprie scelte sul livello di consumo, sui progetti d'investimento da intraprendere e sulla frazione di tempo da allocare all'attività produttiva di mercato. Si comincia ricavando una descrizione approssimata dell'economia artificiale, resa necessaria dalla non-linearità delle condizioni del primo ordine, utilizzando l'espansione in serie di Taylor di tali equazioni intorno allo stato stazionario. Per la soluzione numerica del modello multivariato dinamico con aspettative razionali che ne risulta, si utilizza poi il metodo ricorsivo di Binder-Pesaran (1997).

Successivamente si “calibra” il modello sui dati trimestrali per l'economia U.S.A. nel periodo 1954-82. Il confronto tra le predizioni del modello ed i dati reali si compie comparando le proprietà statistiche dei dati simulati – economia artificiale – con i “fatti stilizzati” dell'economia U.S.A., calcolati sui dati reali detrendizzati con il filtro HP (Hodrick e Prescott, 1980). In particolare, (i) si colpisce l'economia artificiale con una serie di shock casuali generati da una distribuzione con le proprietà statistiche dei residui di Solow, (ii) si applicano le leggi di moto trovate grazie al metodo di Binder-Pesaran sopra menzionato, (iii) si determinano i sentieri temporali per tutte le variabili d'interesse – prodotto, consumo, investimenti, stock di capitale, ore lavorate e produttività – ed infine

¹ La specificazione delle forme funzionali è basata in gran parte sul modello base di Prescott (1986), con l'eccezione del progresso tecnologico, che in questo studio si assume AR(1) nei logaritmi anziché nei livelli.

(iv) sulle serie generate, anch'esse filtrate, si calcolano le statistiche che caratterizzano il ciclo economico artificiale. Ripetendo la procedura 100 volte, si calcolano le medie delle statistiche ottenute ad ogni iterazione e diventa possibile confrontare le proprietà delle serie artificiali con i momenti campionari dei “fatti stilizzati”.

I risultati indicano che, pur essendo una rappresentazione estremamente stilizzata della realtà economica, il modello di ciclo reale si dimostra sorprendentemente capace di replicare le caratteristiche essenziali del ciclo economico osservato.

2. Il modello

Presentiamo un modello di ciclo reale che potrebbe definirsi “standard” o “di base” e le cui caratteristiche sono desunte dai punti di contatto tra le varie specificazioni dei primi modelli di quest'approccio – si tratta, quindi, di una sorta di massimo comune denominatore delle prime versioni dei modelli di ciclo reale. Nel corso degli anni, infatti, il modello di equilibrio del tipo Lucas-Barro, nel quale l'imperfetta percezione del livello dei prezzi da parte degli agenti rappresentava il meccanismo alla base delle fluttuazioni economiche, è andato evolvendosi in un modello che descrive “real business cycles”, nel senso che i fenomeni monetari vengono deliberatamente trascurati e la fonte delle fluttuazioni risiede negli spostamenti inattesi della funzione di produzione.

Preferenze

La dinamica dell'economia è il risultato delle decisioni di un agente rappresentativo che massimizza la funzione di utilità scontata attesa

$$E_1 \left\{ \sum_{t=1}^{+\infty} \beta^{t-1} u(c_t, l_t) \right\},$$

dove $E_t(\cdot)$ indica l'aspettativa formulata sulla base dell'informazione disponibile al tempo t , β è il fattore di sconto soggettivo che determina le preferenze dell'individuo per una combinazione di beni in un certo periodo rispetto ad un altro, c_t è il consumo, l_t il tempo libero nel periodo t e le usuali condizioni di regolarità valgono per la funzione di utilità istantanea $u = u(c_t, l_t)$. Nel caso qui esaminato, in particolare, si utilizza la seguente specificazione per la funzione di utilità istantanea

$$u(c_t, l_t) = \log c_t + \alpha \log l_t, \quad (1)$$

che discende dalla classe di funzioni di utilità di potenza ed è caratterizzata da un tasso di avversione relativa al rischio e da un'elasticità di sostituzione intertemporale tra consumo, c_t , e tempo libero, l_t , costanti, oltre che da un'elasticità di sostituzione intratemporale pari ad 1.

Tecnologia

Viene prodotto un unico bene, utilizzando il lavoro offerto dagli individui, n_t , e lo stock di capitale predeterminato – risultante dal processo di accumulazione del periodo precedente – k_t :

$$y_t = z_t f(k_t, n_t),$$

con z_t che rappresenta lo stato della tecnologia e con $k_t, n_t \geq 0$. La funzione f , inoltre, è omogenea di primo grado con prodotti marginali degli input positivi e decrescenti.

Come si vede, la relazione che lega le quantità di input – lavoro e capitale – alla quantità di bene prodotto non è di tipo deterministico, dato che l'ipotesi cruciale è che la tecnologia venga influenzata da shock esogeni alla produttività totale dei fattori, rappresentata dal valore di z_t . Da una stessa combinazione degli input impiegati, quindi, possono risultare diversi – in teoria, infiniti – livelli di prodotto y_t , secondo le realizzazioni del processo stocastico che sottintende alla tecnologia.

Nel modello utilizzato la funzione di produzione è Cobb-Douglas:

$$f(k_t, n_t) = k_t^\theta n_t^{1-\theta}, \quad (2)$$

mentre il processo stocastico per il parametro che esprime la produttività totale dei fattori è il seguente:

$$z_{t+1} = z_t^\rho \varepsilon_{t+1}, \quad (3)$$

con la componente d'innovazione, ε_t , che si assume pari alla realizzazione di una v.c. con media 1 e varianza finita σ_ε^2 . Tale processo è AR(1) nei logaritmi, $\log z_{t+1} = \rho \log z_t + e_{t+1}$, con $e_t = \log \varepsilon_t$.

I vincoli al problema di massimizzazione sono posti dalla limitatezza delle risorse disponibili da destinare al consumo ed all'investimento e dall'ammontare del tempo disponibile per il lavoro ed il tempo libero:

$$c_t + i_t \leq y_t$$

$$n_t + l_t \leq 1,$$

dove $i_t \geq 0$ rappresenta la spesa per investimenti ed il tempo totale disponibile viene normalizzato ad 1 per semplicità, così che n_t e l_t rappresentano le quote che vengono rispettivamente destinate all'attività produttiva di mercato ed al tempo libero.

Accumulazione del capitale

Lo stock di capitale è accumulato secondo il seguente processo:

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + i_t,$$

dove δ è il tasso di deprezzamento, assunto costante. In assenza di nuovi progetti d'investimento, quindi, lo stock di capitale diviene completamente inutilizzabile e la produzione cessa dopo un numero di periodi che dipende dal valore di δ .

3. Equilibrio competitivo e stato stazionario

Deriviamo ora le equazioni che descrivono l'equilibrio competitivo nell'economia artificiale appena specificata, risolvendo il problema di massimizzazione vincolata associato. Considerato che, data l'assunzione di non sazietà, i vincoli sulle risorse possono essere espressi come uguaglianze, il Lagrangiano è

$$L = \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t [\log c_t + \alpha \log l_t] + \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \lambda_t [z_t k_t^\theta n_t^{1-\theta} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] + \sum_{t=0}^{+\infty} \beta^t \mu_t (1 - n_t - l_t),$$

dove gli investimenti sono stati sostituiti con la legge di accumulazione del capitale. Ora, derivando rispetto alle variabili di scelta c_t , l_t , n_t , k_{t+1} , ed ai moltiplicatori λ_t e μ_t , si ricavano le condizioni del primo ordine:

$$1/c_t - \lambda_t = 0 \quad (4)$$

$$\alpha/l_t - \mu_t = 0 \quad (5)$$

$$\lambda_t (1-\theta) z_t k_t^\theta n_t^{-\theta} - \mu_t = 0 \quad (6)$$

$$\beta \lambda_{t+1} (\theta z_{t+1} k_{t+1}^{\theta-1} n_{t+1}^{1-\theta} + 1 - \delta) - \lambda_t = 0 \quad (7)$$

$$z_t k_t^\theta n_t^{1-\theta} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t = 0 \quad (8)$$

$$1 - n_t - l_t = 0. \quad (9)$$

Le (8)–(9) sono i vincoli imposti sulle risorse disponibili e le altre espressioni pongono le condizioni di efficienza intratemporale ed intertemporale che guidano le scelte dell'agente rappresentativo tra il tempo libero ed il lavoro in un dato periodo e quelle tra il consumo in tempi differenti.

Le equazioni (4)–(9) costituiscono un sistema di equazioni dinamiche non lineari, la cui soluzione esiste ed è unica (Prescott, 1986a) ma non è calcolabile analiticamente, a meno di assunzioni poco realistiche sui valori di alcuni parametri². Si rende, quindi, necessario calcolare una soluzione numerica approssimata ed in questa sede si considera un'approssimazione lineare – cioè l'espansione in serie di Taylor del primo ordine – delle (4)–(9) e della legge di moto per il progresso tecnologico (3), intorno ad un punto “notevole”. La scelta naturale di tale punto ricade sullo “stato stazionario”, che indichiamo con il vettore $(\bar{y}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{k}, \bar{n}, \bar{w}, \bar{z})$. Come si vede, tale vettore include anche il valore di stato stazionario della variabile w , il salario reale, che definiamo semplicemente come la produttività marginale dell'input di lavoro – come accade in un mercato perfettamente competitivo come quello in esame – cioè $w_t = \partial y_t / \partial n_t = (1-\theta) z_t k_t^\theta n_t^{-\theta}$.

Calcolare lo stato stazionario del modello significa trovare i valori delle variabili che risolvono il problema nella versione deterministica, nella quale le variabili si mantengono ad un livello costante. Tali valori, quindi, si ricavano risolvendo le *condizioni di equilibrio di stato stazionario*, che si ottengono riscrivendo le condizioni necessarie (4)–(9) con $z_t = \bar{z} = 1$ in tutti i periodi e, di conseguenza, con $c_t = c_{t+1} = \bar{c}$, $n_t = n_{t+1} = \bar{n}$ e $k_t = k_{t+1} = \bar{k}$.

² Ad esempio, è necessario porre uguale ad 1 il tasso di deprezzamento dello stock di capitale fisico.

Cominciamo dalla condizione (8), che rappresenta il vincolo sulle risorse che possono essere destinate al consumo o al finanziamento di nuovi progetti d'investimento. In termini di valori di stato stazionario, questa diventa

$$\bar{k} = \bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta} - \bar{c} + (1-\delta)\bar{k}$$

e poiché il livello dell'output di stato stazionario che risulta dalla (2) è $\bar{y} = \bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta}$, si ricava

$$\delta \bar{k} = \bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta} - \bar{c} = \bar{y} - \bar{c}. \quad (10)$$

Si noti che, essendo $i_t = k_{t+1} - (1-\delta)k_t$, allora $\delta \bar{k} = \bar{i}$: allo stato stazionario, cioè, non si ha crescita dello stock di capitale e l'investimento è solo sufficiente a rimpiazzare la parte usurata ed obsoleta.

Se sostituiamo nella (6) le espressioni per λ_t , μ_t ed l_t ricavabili rispettivamente dalle (4), (5) e (9) e calcoliamo l'espressione risultante in corrispondenza dello stato stazionario, otteniamo la seguente equazione

$$\alpha \bar{c} = (1-\theta)(1-\bar{n})\bar{k}^\theta \bar{n}^{-\theta}. \quad (11)$$

Procedendo allo stesso modo, dalla (7) si ricava

$$\begin{aligned} \bar{c}^{-1} &= \beta \theta \bar{c}^{-1} \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} + \beta \bar{c}^{-1} (1-\delta) \\ \theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} &= (1/\beta) + \delta - 1. \end{aligned} \quad (12)$$

Si tratta quindi di risolvere il sistema costituito dalle (10), (11) e (12) per i valori di \bar{c} , \bar{n} e \bar{k} . Sostituendo a \bar{c} nella (11) la corrispondente espressione ricavabile dalla (10), e dividendo successivamente per \bar{k} , si ottiene

$$\alpha \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} - \alpha \delta = (1-\theta)(1-\bar{n})\bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{-\theta}$$

Ora sostituiamo, nella precedente, le espressioni per $\bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} = [(1/\beta) + \delta - 1]/\theta$ e per $\bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{-\theta} = [(1/\beta) + \delta - 1]/\theta \bar{n}$ ricavate dalla (12) e risolviamo per \bar{n} , così da ottenere il valore di stato stazionario per la variabile "ore di lavoro":

$$\bar{n} = \frac{\gamma(1-\theta)}{\gamma(\alpha - \theta + 1) - \alpha\theta\delta},$$

con $\gamma \equiv (1/\beta) + \delta - 1$. Sostituendo tale valore nella (12), si ricava il valore di stato stazionario anche per la variabile "stock di capitale":

$$\bar{k} = (\gamma/\theta)^{1/(\theta-1)} \bar{n}.$$

A questo punto, dati \bar{n} e \bar{k} , è immediato ricavare anche il valore del consumo \bar{c} dalla (10),

$$\bar{c} = \bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta} - \delta \bar{k},$$

e procedendo a cascata abbiamo i valori di stato stazionario per tutte le altre variabili considerate, semplicemente ricordando la funzione di produzione (2) ed il vincolo sulle risorse (10).

Riassumendo, lo stato stazionario $(\bar{y}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{k}, \bar{n}, \bar{w})$ è completamente identificato dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned}
\text{lavoro:} \quad \bar{n} &= \frac{[(1/\beta) + \delta - 1](1 - \theta)}{[(1/\beta) + \delta - 1](\alpha - \theta + 1) - \alpha\theta\delta} \\
\text{capitale:} \quad \bar{k} &= \left[\frac{(1/\beta) + \delta - 1}{\theta} \right]^{\frac{1}{\theta-1}} \bar{n} \\
\text{prodotto:} \quad \bar{y} &= \bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta} \\
\text{investimenti:} \quad \bar{i} &= \delta \bar{k} \\
\text{consumo:} \quad \bar{c} &= \bar{y} - \bar{i} \\
\text{salario:} \quad \bar{w} &= (1 - \theta) \bar{k}^\theta \bar{n}^{-\theta}.
\end{aligned} \tag{13}$$

4. La descrizione approssimata dell'economia artificiale

Come detto, il primo passo per risolvere il modello per le variabili di decisione consiste nel linearizzare le condizioni di efficienza (4)–(9) con il polinomio di Taylor del primo ordine centrato sullo stato stazionario $(\bar{y}, \bar{c}, \bar{i}, \bar{k}, \bar{n}, \bar{w}, \bar{z})$. Lo scopo, quindi, è di trasformare il sistema (4)–(9) in un sistema *lineare*, pur con i coefficienti che sono complicate funzioni dei parametri del modello – gli stessi valori di stato stazionario, infatti, sono in ultima analisi funzioni di tali parametri.

Illustriamo la procedura necessaria a linearizzare la condizione (8), il vincolo sulle risorse. Utilizziamo, d'ora in avanti, la seguente notazione: x_t è il vettore delle variabili d'interesse – in livello – \bar{x} è il corrispondente vettore di stato stazionario e gli elementi di \tilde{x}_t sono le deviazioni percentuali di ogni variabile dal rispettivo valore di stato stazionario, vale a dire $\tilde{x}_{it} = (x_{it} - \bar{x}_i) / \bar{x}_i$. Si tratta di trovare il polinomio che approssima il valore della funzione $f(k_t, n_t, z_t, c_t)$,

$$k_{t+1} = k_t^\theta n_t^{1-\theta} z_t - c_t + (1 - \delta)k_t,$$

per tutti i punti nell'intorno dello stato stazionario. Calcolata in tale punto, la funzione vale

$$\bar{k} = \bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta} \bar{z} - \bar{c} + (1 - \delta)\bar{k},$$

per cui, ricavando il polinomio di Taylor di ordine 1 centrato su \bar{x} , si ha

$$k_{t+1} \cong f(\bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial c} (c_t - \bar{c}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial k} (k_t - \bar{k}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial n} (n_t - \bar{n}) + \frac{\partial f(\bar{x})}{\partial z} (z_t - \bar{z})$$

$$k_{t+1} - \bar{k} = (\bar{c} - c_t) + [\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} + 1 - \delta] (k_t - \bar{k}) + [(1 - \theta) \bar{k}^\theta \bar{n}^{-\theta}] (n_t - \bar{n}) + [\bar{k}^\theta \bar{n}^{1-\theta}] (z_t - \bar{z}).$$

Dal momento che risulta conveniente esprimere le variabili del sistema approssimato come deviazioni dallo stato stazionario e poiché nel caso dello stock di capitale tale scarto è

$\tilde{k}_{t+1} = (k_{t+1} - \bar{k})/\bar{k}$, il primo passo consiste nel dividere tutti i termini dell'espressione precedente per \bar{k} , ottenendo

$$\tilde{k}_{t+1} = \frac{(\bar{c} - c_t)}{\bar{k}} + [\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} + 1 - \delta] \tilde{k}_t + [(1-\theta)\bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta}](n_t - \bar{n}) + \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} (z_t - \bar{z}).$$

Sostituiamo ora anche le altre variabili, c_t , n_t e z_t con le rispettive deviazioni percentuali \tilde{c}_t , \tilde{n}_t e \tilde{z}_t , dividendo le differenze per il rispettivo valore di stato stazionario ed operando le opportune trasformazioni sui coefficienti. Si ottiene così

$$\tilde{k}_{t+1} = -\frac{\bar{c}}{\bar{k}} \tilde{c}_t + [\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} + 1 - \delta] \tilde{k}_t + [(1-\theta)\bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta}] \tilde{n}_t + [\bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta}] \tilde{z}_t,$$

dove per l'ultimo termine si è sfruttato il fatto che $\bar{z} = 1$, per cui $(z_t - \bar{z}) = \tilde{z}_t$.

Tralasciamo i calcoli necessari a linearizzare le restanti condizioni di equilibrio competitivo, in quanto del tutto analoghi a quelli appena descritti, per soffermarci, invece, sul processo per gli shock tecnologici. Seguendo la notazione già utilizzata, abbiamo $z_{t+1} = z_t^\rho \varepsilon_{t+1}$ e $\bar{z} = \bar{z}^\rho \bar{\varepsilon}$ per cui il polinomio di Taylor per questo problema risulta

$$z_{t+1} - \bar{z} = \rho \bar{z}^{\rho-1} (z_t - \bar{z}) \bar{\varepsilon} + \bar{z}^\rho (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})$$

ed in termini di scarti percentuali, considerato che i valori di stato stazionario sono $\bar{z} = 1$ e $\bar{\varepsilon} = 1$,

$$\tilde{z}_{t+1} = \rho \tilde{z}_t + \tilde{\varepsilon}_{t+1}.$$

Si noti che la quantità $(x_t - \bar{x})/\bar{x}$ può essere approssimata con $(\log x_t - \log \bar{x})$ e che, essendo $\bar{z} = 1$, risulta $\log \bar{z} = 0$. Da ciò $\tilde{z}_{t+1} = \log z_{t+1} = \log(z_t^\rho \varepsilon_{t+1}) = \rho \log z_t + \log \varepsilon_{t+1} = \rho \tilde{z}_t + \tilde{\varepsilon}_{t+1}$.

Riepilogando i risultati fin qui ottenuti, l'intero modello approssimato è costituito dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} (\bar{c}/\bar{y})\tilde{c}_t - \tilde{y}_t + (\bar{i}/\bar{y})\tilde{i}_t &= 0 \\ \tilde{k}_{t+1} - \Omega(1-\theta)\tilde{n}_t + (\bar{c}/\bar{k})\tilde{c}_t &= (\theta\Omega + 1 - \delta)\tilde{k}_t + \Omega\tilde{z}_t \\ (\theta-1)\tilde{n}_t + \tilde{y}_t &= \theta\tilde{k}_t + \tilde{z}_t \\ \theta\tilde{n}_t + \tilde{c}_t &= \theta\tilde{k}_t + \tilde{z}_t \\ \Omega\beta\theta(1-\theta)\tilde{k}_{t+1} - \tilde{c}_t &= \Omega\beta\theta(1-\theta)E_t(\tilde{n}_{t+1}) - E_t(\tilde{c}_{t+1}) + \beta\theta\Omega E_t(\tilde{z}_{t+1}) \\ [\bar{n}/(1-\bar{n})]\tilde{n}_t + \tilde{c}_t - \tilde{w}_t &= 0 \\ \tilde{z}_{t+1} &= \rho\tilde{z}_t + \tilde{\varepsilon}_{t+1}, \end{aligned} \tag{14}$$

con $\Omega = \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta}$.

Ora bisogna risolvere il sistema (14) per le variabili del vettore $(\tilde{k}_{t+1}, \tilde{n}_t, \tilde{c}_t, \tilde{y}_t, \tilde{i}_t, \tilde{w}_t)$, ottenendo le regole invarianti nel tempo che guidano gli agenti nelle proprie scelte di consumo, lavoro ed investimento, in funzione dello stock di capitale e della produttività totale dei fattori $(\tilde{k}_t, \tilde{z}_t)$. L'aspetto più problematico è rappresentato dalla presenza dei termini $E_t(\cdot)$, ovvero dei valori attesi sulle realizzazioni future di alcune variabili – si tratta di un equilibrio con aspettative

razionali. Tra i vari metodi che sono stati proposti per la soluzione dei modelli del tipo appena descritto³, qui s'impiega quello di Binder e Pesaran (1997) e che gli stessi autori definiscono "fully recursive".

5. Il metodo ricorsivo di Binder e Pesaran

In generale, possiamo scrivere un modello multivariato lineare con aspettative razionali come

$$\mathbf{A}_{00}x_t = \mathbf{A}_{10}x_{t-1} + \mathbf{A}_{01}E(x_{t+1}|\mathbf{I}_t) + u_t, \quad (15)$$

dove x_t ed u_t sono i vettori delle variabili endogene ed esogene al tempo t , \mathbf{A} e \mathbf{B} sono matrici di coefficienti fissi ed \mathbf{I}_t è il set informativo disponibile al tempo t , comprendente almeno i valori correnti e passati di tutte le variabili⁴. La forma canonica della (15) è

$$x_t = \mathbf{A}x_{t-1} + \mathbf{B}E(x_{t+1}|\mathbf{I}_t) + w_t, \quad (16)$$

con $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{00}^{-1}\mathbf{A}_{10}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{00}^{-1}\mathbf{A}_{01}$ e $w_t = \mathbf{A}_{00}^{-1}u_t$.

Si comincia proiettando la (16) in avanti di N periodi, così da ottenere

$$E(x_{t+N}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A}E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{B}E(x_{t+N+1}|\mathbf{I}_t) + E(w_{t+N}|\mathbf{I}_t)$$

che, definendo $\mathbf{Q}_N = \mathbf{I}_m$, e $\mathbf{R}_{t+N} = \mathbf{B}E(x_{t+N+1}|\mathbf{I}_t) + E(w_{t+N}|\mathbf{I}_t)$, si riscrive come

$$\mathbf{Q}_N E(x_{t+N}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A}E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{R}_{t+N}. \quad (17)$$

Analogamente, quando si va $N-1$ periodi avanti,

$$E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A}E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{B}E(x_{t+N}|\mathbf{I}_t) + E(w_{t+N-1}|\mathbf{I}_t), \quad (18)$$

per cui si può risolvere per $E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t)$ semplicemente sostituendo al termine $E(x_{t+N}|\mathbf{I}_t)$ la relativa espressione ricavabile dalla (17):

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{B}\mathbf{A})E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A}E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{B}\mathbf{Q}_N^{-1}\mathbf{R}_{t+N} + E(w_{t+N-1}|\mathbf{I}_t),$$

da cui, definendo ancora $\mathbf{Q}_{N-1} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{B}\mathbf{A})$ e $\mathbf{R}_{t+N-1} = \mathbf{B}\mathbf{Q}_N^{-1}\mathbf{R}_{t+N} + E(w_{t+N-1}|\mathbf{I}_t)$,

$$\mathbf{Q}_{N-1} E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A}E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{R}_{t+N-1}. \quad (19)$$

Si applica ora la stessa metodologia andando all'indietro nel tempo, cioè considerando la (16) nella coppia di periodi $t+N-1$ e $t+N-2$. Se il primo caso è rappresentato dalla (18), per $t+N-2$ si ha

³ Per una rassegna si veda Uhlig (1999).

⁴ Come noto, infatti, il problema $\mathbf{A}_{00}y_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{k0}y_{t-k} + \sum_{k=0}^K \sum_{h=1}^H \mathbf{A}_{kh}E(y_{t+h-k}|\mathbf{I}_{t-k}) + u_t$ può essere riscritto, ridefinendo le variabili con matrici ausiliarie, come un problema nel quale, oltre alle variabili correnti, compaiono solo termini del periodo immediatamente precedente ($K=1$) ed aspettative sul periodo futuro ($H=1$), come nella (15).

$$E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A} E(x_{t+N-3}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{B} E(x_{t+N-1}|\mathbf{I}_t) + E(w_{t+N-2}|\mathbf{I}_t), \quad (20)$$

per cui, sostituendo la (18) nella (20), si risolve per $E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t)$:

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{B} \mathbf{Q}_{N-1}^{-1} \mathbf{A}) E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A} E(x_{t+N-3}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{B} \mathbf{Q}_{N-1}^{-1} \mathbf{R}_{t+N-1} + E(w_{t+N-2}|\mathbf{I}_t)$$

che, impiegando una notazione analoga alla precedente, si può scrivere come

$$\mathbf{Q}_{N-2} E(x_{t+N-2}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A} E(x_{t+N-3}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{R}_{t+N-2}. \quad (21)$$

Osservando le espressioni (17), (19) e (21), emerge chiaramente la natura ricorsiva del problema. In generale, quindi, considerando j periodi in avanti ($j = 1, 2, \dots, N$), si ha

$$\mathbf{Q}_{N-j} E(x_{t+N-j}|\mathbf{I}_t) = \mathbf{A} E(x_{t+N-j-1}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{R}_{t+N-j},$$

per cui, ponendo

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{N-j} &= \mathbf{I}_m - \mathbf{B} \mathbf{Q}_{N-j+1}^{-1} \mathbf{A} \\ \mathbf{R}_{t+N-j} &= \mathbf{B} \mathbf{Q}_{N-j+1}^{-1} \mathbf{R}_{t+N-j+1} + E(w_{t+N-j}|\mathbf{I}_t), \end{aligned}$$

con le condizioni al limite $\mathbf{Q}_N = \mathbf{I}_m$ e $\mathbf{R}_{t+N} = \mathbf{B} E(x_{t+N+1}|\mathbf{I}_t) + E(w_{t+N}|\mathbf{I}_t)$, la soluzione della (16) è

$$x_t = \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{A} x_{t-1} + \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{R}_t. \quad (22)$$

Se il problema ammette un'unica soluzione – come nel caso del modello di ciclo reale allo studio – per valori sufficientemente grandi di N il valore di x_t non dipende da $E(x_{t+N+1}|\mathbf{I}_t)$ e quindi la soluzione (22) è utilizzabile per dedurre le proprietà del modello, essendo basata solo sulle realizzazioni passate delle variabili di controllo. Le uniche assunzioni necessarie per applicare il metodo ricorsivo, inoltre, riguardano le matrici \mathbf{Q}_{N-j} , che devono essere non singolari per $j = 1, 2, \dots, N$, mentre non si fanno assunzioni sulle matrici dei coefficienti del sistema, cioè \mathbf{A} e \mathbf{B} .

Per scrivere il modello multivariato con aspettative razionali (14) nella forma (15), basta porre

$$\begin{aligned} x_t &= (\tilde{k}_{t+1}, \tilde{n}_t, \tilde{c}_t, \tilde{y}_t, \tilde{i}_t, \tilde{w}_t)' \\ u_t &= (0, \Omega \tilde{z}_t, \tilde{z}_t, \tilde{z}_t, \beta \theta \Omega \tilde{z}_{t+1}, 0)' \end{aligned}$$

e le matrici dei coefficienti

$$\mathbf{A}_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \bar{c}/\bar{y} & -1 & \bar{i}/\bar{y} & 0 \\ 1 & (\theta - 1)\Omega & \bar{c}/\bar{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\theta - 1) & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Omega\beta\theta(1-\theta) & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{n}/(1-\bar{n}) & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{10} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 \\ \theta\Omega + 1 - \delta \\ \theta \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \mathbf{0}_{6 \times 5} \end{array} \right) \quad \mathbf{A}_{01} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{4 \times 6} & \\ \hline 0 & \Omega\beta\theta(1-\theta) & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

con $\Omega = \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta}$ e con $\mathbf{0}_{r \times c}$ che indica una matrice nulla di ordine $(r \times c)$. Tali matrici sono completamente determinate una volta che siano assegnati i valori ai parametri $(\alpha, \beta, \theta, \delta, \rho, \sigma_\varepsilon)$.

Scrivendo u_t più esplicitamente in funzione degli shock esogeni presenti ed attesi, si ha

$$u_t = \mathbf{D}_0 \tilde{z}_t + \mathbf{D}_1 E_t(\tilde{z}_{t+1} | \mathbf{I}_t),$$

dove $\tilde{z}_{t+1} = \rho \tilde{z}_t + \tilde{\varepsilon}_t$ – così che $E_t(\tilde{z}_{t+1}) = \rho \tilde{z}_t$ – e le matrici dei coefficienti sono

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta\theta\Omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La soluzione del modello di ciclo reale allo studio sarà quindi del tipo

$$x_t = \mathbf{C} x_{t-1} + \mathbf{H} z_t \quad (23)$$

e poiché la forma generale delle matrici \mathbf{C} e \mathbf{H} è

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \pi_{kk} \\ \pi_{nk} \\ \pi_{ck} \\ \pi_{yk} \\ \pi_{ik} \\ \pi_{wk} \end{matrix} & \mathbf{0}_{6 \times 5} \end{array} \right) \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \pi_{kz} \\ \pi_{nz} \\ \pi_{cz} \\ \pi_{yz} \\ \pi_{iz} \\ \pi_{wz} \end{pmatrix},$$

la (23) rappresenta, nella sostanza, una “forma ridotta” nella quale le variabili di controllo sono funzioni lineari soltanto delle variabili di stato, con i coefficienti π_{ij} che hanno l’interpretazione di elasticità della variabile i rispetto alla variabile j . Abbiamo quindi ottenuto le regole di decisione invarianti nel tempo per tutte le variabili d’interesse, in funzione dello stock di capitale predeterminato e della tecnologia produttiva:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{t+1} &= \pi_{kk} \tilde{k}_t + \pi_{kz} \tilde{z}_t \\ \tilde{n}_t &= \pi_{nk} \tilde{k}_t + \pi_{nz} \tilde{z}_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{c}_t &= \pi_{ck} \tilde{k}_t + \pi_{cz} \tilde{z}_t \\ \tilde{y}_t &= \pi_{yk} \tilde{k}_t + \pi_{yz} \tilde{z}_t \\ \tilde{i}_t &= \pi_{ik} \tilde{k}_t + \pi_{iz} \tilde{z}_t \\ \tilde{w}_t &= \pi_{wk} \tilde{k}_t + \pi_{wz} \tilde{z}_t\end{aligned}$$

Specificate le condizioni iniziali⁵ per le variabili di stato $(\tilde{k}_1, \tilde{z}_1)$ e generate le realizzazioni della v.c. $\tilde{\varepsilon}$, il modello è così in grado di generare le serie storiche artificiali, le cui proprietà statistiche sono l'oggetto dello studio, realizzando quell'esperimento computazionale (Kydland e Prescott, 1996) che costituisce la fase finale della valutazione di un modello di ciclo reale. Perché la teoria possa generare i dati, tuttavia, è necessario assegnare precisi valori numerici ai parametri del modello, cioè al vettore $(\alpha, \beta, \theta, \delta, \rho, \sigma_\varepsilon)$, attraverso la metodologia divenuta nota con il nome di “calibrazione”.

6. La “calibrazione” del modello

La “calibrazione” affonda le radici nel lavoro di Kydland e Prescott (1982), secondo i quali, per la scelta dei valori dei parametri che compaiono nelle equazioni funzionali della tecnologia e delle preferenze – oltre che nel processo generatore degli shock tecnologici – si deve ricorrere a diverse fonti di informazione nello stesso tempo, anche al di fuori del modello stesso. Oltre all'evidenza ricavabile dalle osservazioni sulla crescita, quindi, i dati messi a disposizione dagli studi microeconomici – le rilevazioni del numero degli occupati, del reddito delle famiglie o le indagini di mercato – costituiscono un'importante, oltre che poco costosa, fonte d'informazione da utilizzare per conoscere il valore dell'elasticità di sostituzione, sia intertemporale che intratemporale, dei vari beni e input che sono parte integrante della specificazione del modello. In termini operativi, questo si riduce, spesso, al semplice calcolo di medie o rapporti statistici di determinate variabili osservate, per assegnare valori ad alcuni dei parametri d'interesse.

Si potrebbe affermare che il modello economico viene “calibrato” – tarato – in modo da riprodurre certe caratteristiche di lungo periodo dell'attività economica – quelle che la teoria indica come rilevanti – perché possa essere utilizzato per comprendere il fenomeno delle fluttuazioni sulla base di una teoria che ne regola il comportamento. Si tratta, quindi, di elaborare un modello che per il modo stesso in cui è stato costruito si comporta come l'economia reale nel lungo periodo, per poi indagare se si ottengono gli stessi risultati anche quando l'attenzione si sposta sulle sue proprietà di breve periodo. Il “calibratore”, quindi, si affida alla teoria attribuendole il ruolo principale per sapere *cosa* misurare e *come*, tracciando in questo modo la più netta linea di demarcazione con l'approccio della stima.

Prima di tutto, per “calibrare” i parametri del modello stesso sulla base del reale comportamento dell'economia reale, è necessario definire le quantità empiriche che corrispondono alle variabili che compaiono nel modello. Poiché il modello “benchmark” di ciclo reale considera

⁵ I risultati non dipendono dai valori iniziali scelti per un orizzonte temporale sufficientemente ampio.

soltanto il settore privato, definiamo le seguenti controparti empiriche, corrispondenti al significato che le diverse variabili assumono in questo contesto:

$$c_t = \textit{personal consumption expenditures of nondurable goods + services}$$

$$i_t = \textit{fixed investment expenditures + consumption of durable goods}$$

$$y_t = c_t + i_t$$

$$n_t = \textit{total nonfarm hours}$$

$$k_t = \textit{capital stocks + stock of consumer durables}$$

$$w_t = y_t / n_t$$

Le misure empiriche utilizzate per ottenere questi aggregati sono nella tab. 2, in Appendice A. Per la serie relativa allo stock di capitale si è operata una trimestralizzazione della serie originaria – a frequenza annuale – riportata nei Conti Nazionali, utilizzando per questo una metodologia illustrata nella stessa Appendice. Anche l’input di lavoro, n_t , è stato ottenuto rapportando le ore lavorate ad una misura della popolazione che considera soltanto gli individui in età lavorativa – da 21 a 64 anni.

Definite le misure empiriche corrispondenti alle variabili del modello artificiale, si può procedere alla fase cruciale della “calibrazione”, ovvero all’assegnazione dei valori dei parametri $(\alpha, \beta, \theta, \delta, \rho, \sigma_\varepsilon)$ che compaiono nelle specificazioni delle forme funzionali del modello, date nel paragrafo 1.

- Cominciamo con il valore della quota del prodotto attribuito al fattore produttivo “capitale”, cioè il valore di θ che compare nella (2). Seguendo Cooley e Prescott (1995), calcoliamo tale valore a partire dalle serie osservate per l’economia degli Stati Uniti, ponendo

$$\theta = \frac{\textit{capital income}}{\textit{net national product}},$$

dove

$$\textit{capital income} = \textit{rental income} + \textit{corporate profits} + \textit{net interest} + \\ \textit{proprietors' income} + (\textit{net national product} - \textit{national income})$$

Per il periodo 1954:1–1982:4, le serie dei Conti Nazionali (NIPA, tab. 1.9 e tab. 1.14) indicano

$$\theta = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \theta_t = 0.36,$$

con $T = 116$ che rappresenta il numero delle osservazioni – trimestri nell’intervallo campionario.

- Per quanto riguarda il tasso di deprezzamento del capitale, poi, si sceglie il valore di δ che sia coerente con le serie degli investimenti e dello stock di capitale e, quindi, con la legge di accumulazione del capitale dell’economia artificiale. Essendo $k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t$, se definiamo δ_t la frazione del capitale k_t divenuto obsoleto nel periodo tra il periodo t e $t+1$, possiamo calcolare la serie

$$\delta_t = \frac{i_t - (k_{t+1} - k_t)}{k_t}$$

e poiché nell'economia artificiale il tasso di deprezzamento è costante, si pone semplicemente

$$\delta = \frac{1}{(T-1)} \sum_{t=1}^{T-1} \delta_t = 0.025.$$

• Consideriamo ora il parametro β , che determina il tasso di sconto soggettivo nella funzione di utilità dell'agente rappresentativo. Utilizziamo, a tal fine, la relazione di equilibrio di stato stazionario (12), vale a dire $\theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} = (1/\beta) + \delta - 1$, da cui, essendo $\bar{k}^{\theta} \bar{n}^{1-\theta} = \bar{y}$, si ricava $\theta (\bar{y}/\bar{k}) = (1/\beta) + \delta - 1$ e quindi

$$s_k = \frac{\bar{k}}{\bar{y}} = \frac{\theta \beta}{1 - \beta(1 - \delta)},$$

dove $s_k = \bar{k}/\bar{y}$ è il rapporto capitale/output di stato stazionario. Ora, poiché si è trovato $\theta = 0.36$ e $\delta = 0.025$, è sufficiente scegliere il valore di β che rende il rapporto s_k uguale al valore medio osservato, cioè $s_k = 8.8$. Risolviamo quindi per β l'espressione precedente:

$$\beta = \frac{s_k}{\theta + (1 - \delta)s_k} = 0.99.$$

Prescott (1986b) afferma che il tasso d'interesse rilevante, in un modello di ciclo reale basato sul modello di crescita neoclassico – come quello che stiamo considerando – è il tasso di redditività del capitale, che può essere calcolato dalla seguente espressione:

$$r = \frac{\text{reddito da capitale} - \text{deprezzamento}}{\text{stock di capitale}},$$

che, nell'ambito del modello, diventa

$$\bar{r} = \frac{\theta \bar{y} - \delta \bar{k}}{\bar{k}} = \frac{\theta \bar{k}^{\theta} \bar{n}^{1-\theta} - \delta \bar{k}}{\bar{k}} = \theta \bar{k}^{\theta-1} \bar{n}^{1-\theta} - \delta.$$

Ora, considerando ancora la (12), l'espressione precedente può scriversi come

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} - 1,$$

da cui, dato il valore di β , possiamo calcolare il tasso d'interesse per lo stato stazionario dell'economia artificiale. Con $\beta = 0.99$ risulta $\bar{r} = 0.01$ – i dati sono trimestrali – ed il valore osservato per il dopoguerra, prossimo al 4% annuo, indica che l'evidenza microeconomica è coerente con il risultato ottenuto a partire dalle osservazioni di lungo periodo.

• Passiamo ora all'individuazione dei parametri che determinano il processo stocastico che genera gli shock tecnologici nel modello di ciclo reale standard, ovvero il coefficiente di autocorrelazione, ρ , e la deviazione standard delle innovazioni, σ_ε .

Deduciamo tali valori, ancora una volta, dal reale comportamento delle variabili economiche,

utilizzando i residui di Solow⁶. Data la specificazione delle funzione di produzione (2), passando ai logaritmi si ottiene

$$\log y_t = \log z_t + \theta \log k_t + (1-\theta) \log n_t.$$

Poiché $\bar{z} = 1$, segue che $\tilde{z}_t = \log z_t - \log \bar{z} = \log z_t - 0 = \log z_t$, così che possiamo ricavare una misura delle deviazioni percentuali del parametro tecnologico dal proprio valore di stato stazionario come

$$\tilde{z}_t = \log y_t - \theta \log k_t - (1-\theta) \log n_t.$$

A partire dai dati sull'output e sugli input di capitale e lavoro e con il valore già trovato $\theta = 0.36$, si può quindi calcolare la serie per le \tilde{z}_t e su questa calcolare il coefficiente di autocorrelazione:

$$\rho = \frac{\text{cov}(\tilde{z}_t, \tilde{z}_{t-1})}{\text{var} \tilde{z}_t} = 0.95.$$

Per quanto riguarda la variabilità, invece, si ha $\sigma_{\tilde{z}} = 0.022$ e poiché per un processo AR(1), come è quello degli shock tecnologici, si ha

$$\sigma_{\tilde{z}}^2 = \frac{\sigma_{\varepsilon}^2}{1 - \rho^2},$$

si ricava il valore della deviazione standard delle innovazioni coerente con le caratteristiche osservate del processo tecnologico, cioè

$$\sigma_{\varepsilon} = \sqrt{(0.022)^2 [1 - (0.95)^2]} = 0.0071.$$

• Rimane da assegnare il valore al parametro α che compare nella funzione di utilità, $u(c_t, l_t) = \log c_t + \alpha \log l_t$, determinando la frazione di tempo destinata all'attività produttiva. A tal fine, consideriamo la prima equazione del sistema di stato stazionario (13), vale a dire

$$\bar{n} = \frac{[(1/\beta) + \delta - 1](1 - \theta)}{[(1/\beta) + \delta - 1](\alpha - \theta + 1) - \alpha\theta\delta}.$$

Poiché nei modelli di ciclo reale “calibrati” sull'economia degli Stati Uniti per il dopoguerra, è praticamente uno standard porre il valore della frazione di tempo speso nel lavoro pari ad un terzo del totale, cioè $\bar{n} = 0.33$, utilizziamo questo valore anche in questa sede. Utilizzando poi i valori già trovati per gli altri parametri che compaiono nell'espressione precedente – vale a dire β , δ e θ – si può ricavare

$$\alpha = \frac{[(1/\beta) + \delta - 1](1 - \theta)[(1/\bar{n}) - 1]}{[(1/\beta) + \delta - 1] - \theta\delta} = 2.$$

⁶ Solow (1956, 1957) misura i cambiamenti della produttività come la quota della variazione della quantità di prodotto che non è spiegabile in termini della variazione degli input impiegati (si tratta, quindi, di una quantità residuale).

Riassumendo, i parametri del modello standard di ciclo reale $(\alpha, \beta, \theta, \delta, \rho, \sigma_\varepsilon)$ “calibrato” sulle osservazioni relative agli Stati Uniti per il periodo 1954:1-1982:4, sono i seguenti⁷

α	β	θ	δ	ρ	σ_ε
2	0.99	0.36	0.025	0.95	0.0071

Utilizzando questi parametri ed applicando le formule riportate in (13), si ottengono i valori di stato stazionario, che divisi – ad eccezione delle ore lavorate – per il fattore di scala $\bar{y} = 1.0075$, sono

\bar{n}	\bar{k}	\bar{y}	\bar{i}	\bar{c}
0.30	8.9	1	0.23	0.77

Questi valori servono ad identificare, insieme ai parametri del modello – dei quali comunque sono anch’essi funzione – gli elementi delle matrici \mathbf{A}_{00} , \mathbf{A}_{10} , \mathbf{A}_{01} , \mathbf{D}_0 e \mathbf{D}_1 , che esprimono il funzionamento approssimato dell’economia artificiale, dato dalla (14), in una forma analoga alla (15) e perciò risolvibile col metodo di Binder-Pesaran (1997):

$$\mathbf{A}_{00}x_t = \mathbf{A}_{10}x_{t-1} + \mathbf{A}_{01}E(x_{t+1}|\mathbf{I}_t) + \mathbf{D}_0z_t + \mathbf{D}_1E_t(z_{t+1}|\mathbf{I}_t).$$

Alla luce dei risultati fin qui ottenuti, queste matrici sono

$$\mathbf{A}_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.776 & -1 & 0.224 & 0 \\ 1 & -0.071 & 0.086 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.64 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.30 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.025 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.415 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.01 \\ 0.36 \\ 0.36 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{0}_{6 \times 5}$$

$$\mathbf{A}_{01} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{4 \times 6} \\ 0 & 0.025 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⁷ I valori utilizzati sono, più precisamente, $\alpha = 1.9885$, $\beta = 0.9856$, $\theta = 0.36$, $\delta = 0.025$, $\rho = 0.9459$ e $\sigma = 0.0071$.

$$\mathbf{D}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.111 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.039 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Con un programma in *Matlab* da me appositamente scritto (il codice è riportato in Appendice B) si è quindi risolto il modello con il metodo ricorsivo di Binder e Pesaran (1997), calcolando le matrici \mathbf{C} e \mathbf{H} nella (23), $x_t = \mathbf{C} x_{t-1} + \mathbf{H} z_t$:

$$\mathbf{C}[:,1] = \begin{pmatrix} \pi_{kk} \\ \pi_{nk} \\ \pi_{ck} \\ \pi_{yk} \\ \pi_{ik} \\ \pi_{wk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9466 \\ -0.2705 \\ 0.5696 \\ 0.1869 \\ -1.3665 \\ 0.4574 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \pi_{kz} \\ \pi_{nz} \\ \pi_{cz} \\ \pi_{yz} \\ \pi_{iz} \\ \pi_{wz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1295 \\ 0.7553 \\ 0.4147 \\ 1.4834 \\ 5.1793 \\ 0.7281 \end{pmatrix},$$

dove $\mathbf{C}[:,1]$ è la prima colonna della matrice \mathbf{C} , ovvero l'unica, come visto, a contenere valori non tutti nulli⁸.

7. La generazione delle serie

A questo punto, per simulare il funzionamento dell'economia artificiale, non resta che stabilire le condizioni iniziali per le variabili di stato – lo stock di capitale ed il livello della tecnologia – generare una serie per gli shock tecnologici esogeni ed infine applicare le leggi di moto appena trovate, così da ricavare le serie relative a tutte le altre variabili considerate.

Per la generazione delle innovazioni tecnologiche – o meglio, delle loro deviazioni percentuali dallo stato stazionario – cioè i termini della serie $\tilde{\varepsilon}_t$, si utilizzano le realizzazioni di una v.c. Normale con media 0 e deviazione standard σ_ε pari al valore “calibrato” (0.0073). Infatti, come detto, i termini ε_t provengono da v.c. i.i.d. con media 1 e varianza σ_ε^2 , così che per $\tilde{\varepsilon}_t = (\varepsilon_t - \bar{\varepsilon})/\bar{\varepsilon}$, si ha $E(\tilde{\varepsilon}_t) = (E(\varepsilon_t) - \bar{\varepsilon})/\bar{\varepsilon} = (1 - 1)/1 = 0$ e $\text{var}(\tilde{\varepsilon}_t) = (1/\bar{\varepsilon}^2) \text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$, ricordando che $\bar{\varepsilon} = 1$.

Assumendo che tutte le altre variabili siano inizialmente al loro valore di stato stazionario – cioè le deviazioni percentuali nel primo periodo sono tutte nulle – si trovano, poi, i valori delle altre variabili, direttamente dalle leggi di moto trovate

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{t+1} &= 0.9466 \tilde{k}_t + 0.1295 \tilde{z}_t \\ \tilde{n}_t &= -0.2705 \tilde{k}_t + 0.7553 \tilde{z}_t \end{aligned}$$

⁸ Ciò dipende semplicemente dal fatto che lo stock di capitale, \tilde{k}_{t+1} , è la prima variabile del vettore x_t ed il suo valore ritardato, \tilde{k}_t , funge anche da variabile di stato.

$$\tilde{c}_t = 0.5696 \tilde{k}_t + 0.4147 \tilde{z}_t$$

$$\tilde{y}_t = 0.1869 \tilde{k}_t + 1.4834 \tilde{z}_t$$

$$\tilde{l}_t = -1.3665 \tilde{k}_t + 5.1793 \tilde{z}_t$$

$$\tilde{w}_t = 0.4574 \tilde{k}_t + 0.7281 \tilde{z}_t$$

Come si vede, le decisioni dell'agente rappresentativo – in particolare relativamente ai progetti d'investimento da intraprendere – sono molto sensibili agli shock esogeni che colpiscono la tecnologia. Ciò si manifesta negli elevati valori dei coefficienti π_{xz} , cioè degli elementi della matrice \mathbf{H} , che raggiungono i valori massimi in corrispondenza degli investimenti ($\pi_{iz} = 5.18$) e del prodotto ($\pi_{yz} = 1.48$), ma che risultano elevati anche per le ore di lavoro ($\pi_{nz} = 0.75$) e per il salario reale ($\pi_{wz} = 0.73$). Queste variabili, quindi, manifestano una spiccata tendenza a deviare dal proprio valore di stato stazionario in conseguenza delle fluttuazioni tecnologiche. Uno shock favorevole unitario alla tecnologia ($\tilde{z}_t = 1$) provoca infatti un aumento degli investimenti, che raggiungono un livello maggiore del 5% rispetto allo stato stazionario ed una deviazione dell'output, nello stesso periodo, prossima al 1.5%.

Tra le variabili di scelta, inoltre, il consumo è la componente meno reattiva rispetto agli shock esogeni alla tecnologia ($\pi_{cz} = 0.41$), a testimonianza del fatto che l'elevato valore del parametro β (0.99) implica una tendenza della famiglia rappresentativa a distribuire nel tempo gli aumenti inattesi delle possibilità di consumo. Il contestuale aumento degli investimenti rientra proprio in questa volontà di assicurarsi un flusso di consumo maggiore anche per il futuro, grazie all'incremento della capacità produttiva reso possibile dal maggiore stock di capitale che sarà disponibile nei periodi successivi – le deviazioni percentuali dello stock di capitale dallo stato stazionario sono molto persistenti, essendo $\pi_{kk} = 0.94$.

La tendenza di queste variabili ad allontanarsi dal rispettivo valore di stato stazionario in risposta agli shock tecnologici, è tuttavia contrastata dalla reazione delle ore lavorate e degli investimenti all'incremento dello stock di capitale che ne risulta – nel caso di shock favorevoli. I coefficienti, π_{nk} e π_{ik} , infatti, sono negativi ($\pi_{nk} = -0.27$, $\pi_{ik} = -1.37$) ed assicurano il ritorno del sistema allo stato stazionario grazie all'assorbimento degli shock esogeni. Se lo stock di capitale corrente è ad un livello relativamente elevato – cioè al di sopra del valore di stato stazionario – per l'alta produttività del passato, infatti, gli agenti avranno interesse a ridurre la spesa per investimenti la propria offerta di lavoro, a causa dell'effetto ricchezza conseguente all'aumento del salario reale.

Tornando alla fase della simulazione, poiché le serie reali sono composte da 116 osservazioni – dati trimestrali da 1954:1 a 1982:4 – si sono generate serie per lo stesso numero di periodi⁹ e per ognuna si sono calcolate le statistiche per in confronto con l'economia reale. La fig. 1, in Appendice A, riporta le deviazioni percentuali dal trend Hodrick-Prescott (1980) delle variabili generate, cioè $\log(y_t/\hat{y}_t)$ ecc., con \hat{y}_t che indica il valore corrispondente ad y_t sul trend HP calcolato con il valore del parametro $\lambda = 1600$, usualmente utilizzato per dati trimestrali.

⁹ In realtà, per eliminare il problema della dipendenza dei risultati dalle condizioni iniziali, si sono generate serie di dimensione maggiore e si sono considerati soltanto gli ultimi 116 valori.

Per passare da una generica serie espressa in deviazioni percentuali, \tilde{x}_t – come quelle generate nella simulazione – ai logaritmi dei livelli delle variabili, $\log x_t$, è stato necessario calcolare il logaritmo dei rispettivi valori di stato stazionario ed aggiungere a questi ultimi i valori simulati dal modello

$$\log x_t = \log \bar{x} + \tilde{x}_t .$$

La fig. 2 riporta, analogamente a quanto fatto per il modello, le fluttuazioni cicliche del prodotto, del consumo e degli investimenti, osservate per l'economia USA. I dati, cioè, sono espressi come deviazioni percentuali dal rispettivo trend HP.

Da un primo confronto grafico tra le figure 1 e 2 si può senz'altro concludere che il modello di ciclo reale replica piuttosto bene la volatilità – soprattutto in termini relativi – e la prociclicità delle serie economiche considerate. La fig. 1 mostra chiaramente che le fluttuazioni dell'output, nell'economia artificiale, sono molto più ampie – circa tre volte – rispetto a quelle del consumo e molto meno – circa tre volte – di quelle degli investimenti. Lo stesso ordinamento nella volatilità si osserva nella fig. 2, dove le fluttuazioni sono quelle osservate, anche se in quest'ultimo caso il consumo è più variabile di quanto il modello predica. Sempre dalla semplice osservazione dei grafici, inoltre, si deduce l'elevata prociclicità sia della serie del consumo che degli investimenti, tanto per le serie generate dal modello che per quelle osservate.

Passando all'analisi grafica del mercato del lavoro, nella fig. 3 confrontiamo l'andamento delle ore lavorate e della produttività che risultano dalla simulazione del modello con le corrispondenti serie osservate.

Come si vede, mentre nell'economia reale le ore lavorate sono scarsamente o negativamente correlate con il livello della produttività¹⁰, nel modello di ciclo reale queste variabili mostrano una volatilità molto simile ed una correlazione positiva molto elevata – cioè prossima ad 1. Questo problema è tipico dei modelli di ciclo reale che considerano come unica fonte di shock quelli di natura tecnologica e dal tentativo di porvi rimedio hanno avuto origine molte estensioni del caso standard – un esempio è costituito dal modello con gli shock agli acquisti pubblici di Christiano ed Eichenbaum (1992).

Si noti, che per il modo stesso in cui è stata condotta la simulazione, non ha senso confrontare le serie dei due grafici punto per punto, cioè periodo per periodo. In altre parole, non ha senso confrontare le date dei punti di picco delle serie simulate con quelle vere. Ciò si deve al fatto che la serie degli shock applicati all'economia artificiale nella fase della simulazione non sono quelli stimati coi residui di Solow. Lo scopo della “calibrazione”, infatti, non è di replicare *il sentiero osservato* per le serie economiche, ma di identificare *il processo generatore* di tali serie – ovvero le sue proprietà statistiche – del quale la storia osservata costituisce solo *una* delle possibili realizzazioni.

Per verificare anche da un punto di vista quantitativo le osservazioni appena fatte sulle proprietà del modello, ripetiamo la simulazione 100 volte e calcoliamo i valori medi delle statistiche ottenute ad ogni iterazione per dedurre le proprietà statistiche delle fluttuazioni dell'economia

¹⁰ Il valore della correlazione tra le ore e la produttività dipende ovviamente dalla misura dell'input di lavoro utilizzata e per tale variabile esistono diverse possibilità tutte accettabili in linea teorica.

artificiale in relazione ai possibili sentieri per il valore della produttività totale dei fattori produttivi. Riportiamo i risultati nella tab. 1, in Appendice A.

La variabilità del prodotto aggregato nell'economia artificiale è l'80% del valore osservato, a testimonianza del fatto che i residui di Solow non spiegano da soli tutta la variabilità di questa variabile e che uno spazio non trascurabile, nella spiegazione delle fluttuazioni economiche, viene lasciato anche a fattori diversi dagli shock di natura tecnologica. Per quanto riguarda la volatilità delle altre serie generate – misurata in termini di deviazione standard percentuale relativamente a quella dell'output – osserviamo che le fluttuazioni del consumo, nel modello, sono meno ampie che nella corrispondente serie reale – in quest'ultimo caso il consumo fluttua il 46% del prodotto, mentre nell'economia artificiale tale variabilità relativa è soltanto del 33% – mentre per gli investimenti e lo stock di capitale i risultati sono molto buoni. In linea con i risultati della letteratura, possiamo senz'altro indicare nel comportamento dell'occupazione le discrepanze maggiori, visto che l'oscillazione ciclica di tale grandezza rimane sensibilmente troppo bassa nel modello, con la conseguenza che le ore lavorate risultano troppo correlate con la produttività (0.91 in luogo di -0.28).

Passando all'analisi dei comovimenti – misurati dalle cross-correlazioni tra l'output e le altre variabili considerate – i risultati per il consumo, gli investimenti e lo stock di capitale fisico sono coerenti con le caratteristiche osservate, mentre le ore lavorate e la produttività – in particolare quest'ultima serie – sono previste troppo correlate col prodotto e, come è stato possibile dedurre anche dalla semplice osservazione della fig. 3, troppo correlate tra di loro.

8. Conclusioni

In conclusione, pur costituendo una rappresentazione estremamente semplificata e stilizzata del complesso funzionamento della realtà economica, il modello standard di ciclo reale si dimostra sorprendentemente capace di replicare le proprietà statistiche osservate per molte delle serie considerate, quando viene calibrato sull'economia reale.

I problemi maggiori, d'altra parte, riguardano il mercato del lavoro e l'incapacità di dare conto di una correlazione tra le ore lavorate e la produttività pari a quella osservata. Una buona frazione di questa discrepanza può senz'altro essere attribuita al fatto che l'economia artificiale è guidata soltanto dagli shock alla funzione di produzione aggregata. Dal punto di vista della dinamica nel mercato del lavoro, infatti, tali disturbi sono responsabili dello spostamento della curva di domanda di lavoro lungo una curva di offerta che, al contrario, non si muove, dando luogo ad una variazione significativa delle ore lavorate in risposta agli shock tecnologici, così che queste finiscono col risultare molto strettamente legate alla produttività. Dalla necessità di risolvere questo problema sono nate un gran numero di proposte, tra le quali quella di Christiano ed Eichenbaum (1992), che nel proprio modello di ciclo reale considerano anche gli shock alla spesa pubblica, ovvero una fonte di disturbo dal lato della domanda. I risultati della letteratura indicano che all'aumentare della complessità della specificazione del modello, è possibile dare conto di aspetti sempre più sottili della realtà economica, a scapito, però, della semplicità interpretativa del caso standard.

Appendice A – Grafici e tabelle

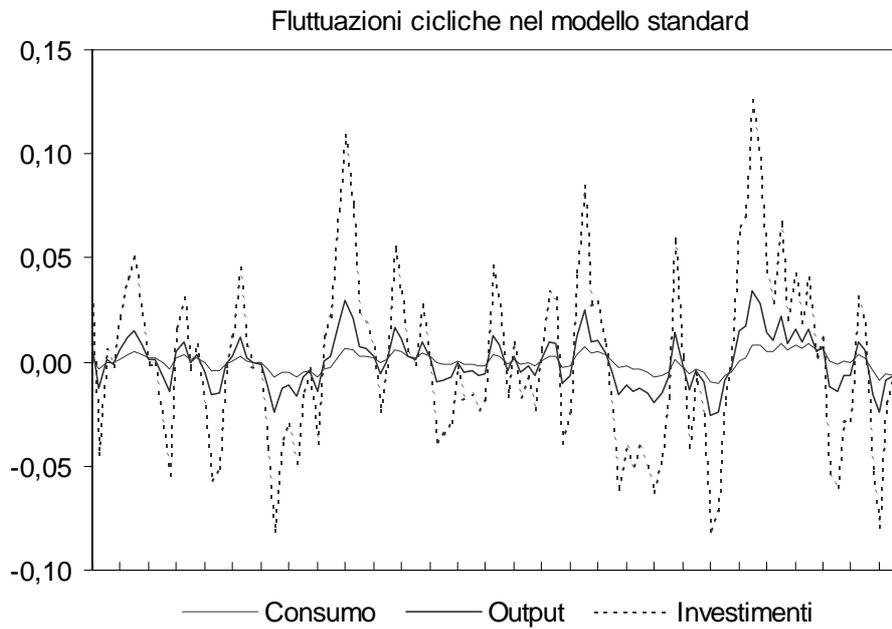


FIG. 1 Fluttuazioni cicliche del prodotto, consumo ed investimenti nel modello benchmark di ciclo reale. Deviazioni percentuali dal trend HP.

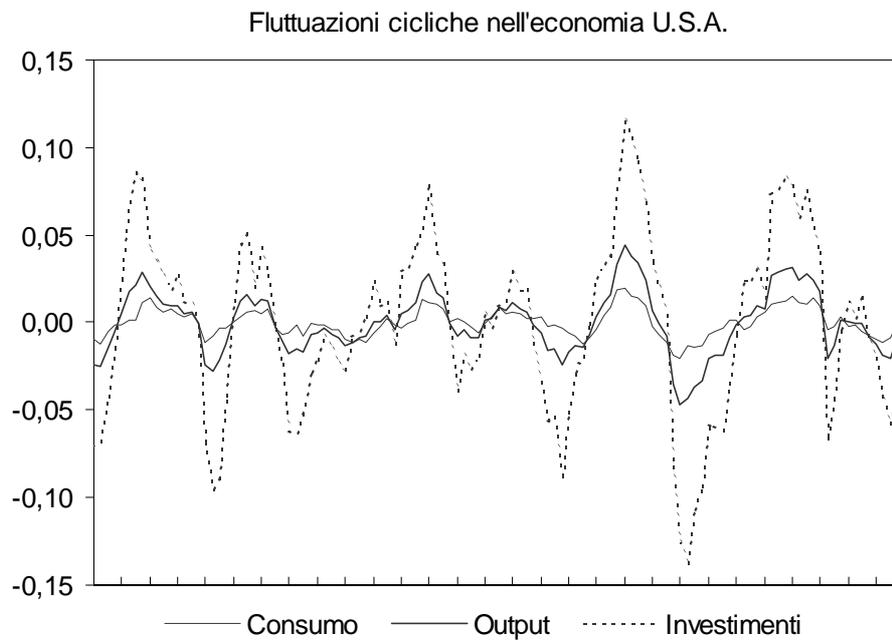


FIG. 2 Fluttuazioni cicliche delle serie storiche osservate (Stati Uniti, 1954:1-1982:4). Deviazioni percentuali dal trend HP.

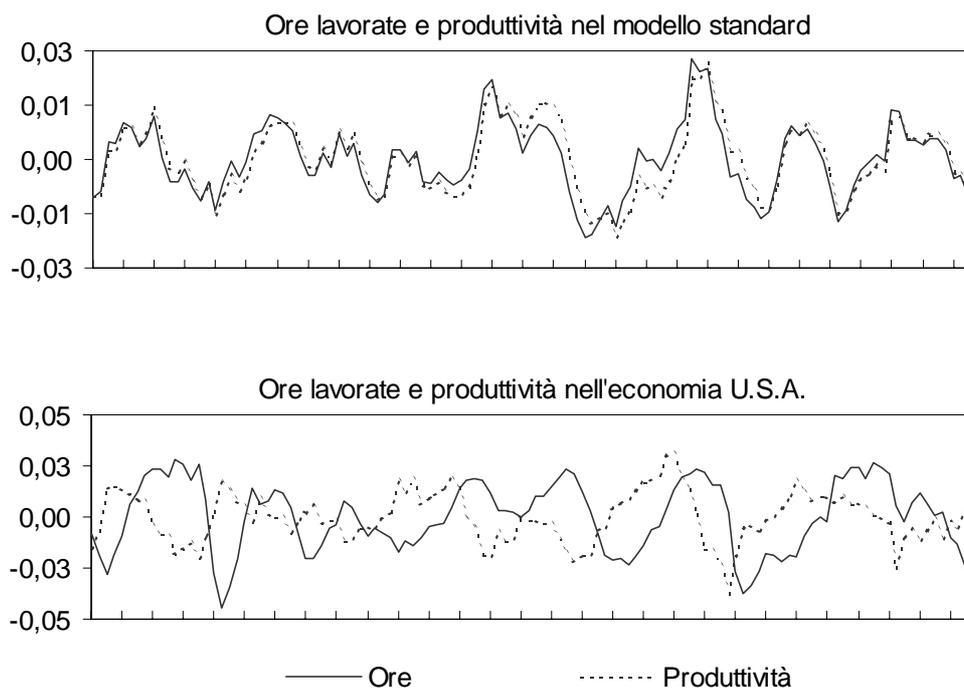


Fig. 3 Fluttuazioni cicliche della serie delle ore lavorate e della produttività nel modello standard e negli Stati Uniti. Deviazioni percentuali dal trend HP.

TABELLA 1 Confronto tra il modello di ciclo reale e l'economia U.S.A.

Variabile x		dev. standard		cross-correlazione tra Prodotto(t) e x(t+j)				
		%	relativa	-2	-1	0	+1	+2
Prodotto	modello	1.39	1.00	.43	.69	1.00	.69	.43
	dati	1.77	1.00	.68	.88	1.00	.88	.68
Consumo	modello	.46	.33	.25	.53	.89	.76	.64
	dati	.81	.46	.62	.80	.90	.79	.63
Investimenti	modello	4.84	3.48	.50	.72	.99	.64	.37
	dati	5.07	3.22	.65	.85	.97	.86	.65
Capitale	modello	.41	.30	-.15	.07	.37	.56	.66
	dati	.64	.35	-.14	.11	.36	.57	.69
Ore lavorate	modello	.71	.51	.51	.72	.98	.61	.33
	dati	1.72	.97	.21	.51	.75	.84	.79
Produttività	modello	.69	.50	.37	.64	.98	.75	.55
	dati	1.24	.70	.69	.57	.39	.08	-.14
correlazione Ore lavorate – Produttività						modello	.91	
						dati	-.28	

Note: le statistiche per l'economia artificiale sono le medie di 100 simulazioni. Tutte le variabili sono in logaritmo ed in deviazione dal trend HP.

TABELLA 2 Serie storiche degli Stati Uniti (dati trimestrali, 1954:1-1982:4)

Miliardi di dollari del 1992, ad eccezione di (1) = indice (1982:4=100) e (2) = numero di ore.

Anno	GNP	Personal consumption expenditures			Fixed investment expenditures			Capital stocks			Labor input		Productivity (1)	
		Durable goods	Nondurable goods	Services	Total	Nonresidential		Nonfarm inventories	Nonresidential structures	Nonresidential equipment	Total nonfarm hours (1)	Average weekly hours in mfg (2)		
						Total	Structures							Equipment
1954:1	1859.9	102.6	548.9	534.2	219.0	130.6	75.1	63.6	263.2	1472.4	522.0	96.4	39.6	41.4
2	1858.4	102.7	545.2	545.4	221.9	128.6	75.7	61.7	260.6	1481.5	526.5	95.6	39.5	41.8
3	1879.0	105.1	554.4	554.6	229.9	131.2	75.6	63.9	258.5	1490.6	531.1	94.8	39.6	42.6
4	1917.1	112.1	563.0	560.2	234.8	130.7	75.2	63.6	258.4	1499.6	535.8	95.8	39.9	43.0
1955:1	1971.3	117.8	565.5	568.2	245.1	133.8	77.6	64.8	261.4	1508.6	540.4	96.8	40.5	43.7
2	2005.9	125.6	575.5	572.0	255.9	142.5	79.5	70.8	265.8	1518.4	546.9	98.4	40.7	43.8
3	2031.8	128.4	580.2	577.5	261.4	149.5	82.1	75.0	269.8	1528.5	553.7	99.2	40.6	44.0
4	2042.4	129.0	591.8	588.7	261.4	153.3	84.0	77.0	274.8	1538.8	560.7	100.0	40.9	43.9
1956:1	2037.0	121.3	599.2	595.0	254.9	149.6	86.7	72.5	279.7	1548.3	566.6	100.4	40.6	43.6
2	2050.9	119.1	596.6	602.1	256.4	151.5	89.7	72.3	283.6	1560.6	572.9	100.4	40.3	43.9
3	2047.1	118.2	595.9	609.3	255.5	152.3	90.3	72.6	286.7	1572.9	579.3	100.0	40.3	44.0
4	2078.0	118.1	600.1	618.3	253.4	151.7	90.1	72.3	289.7	1585.1	585.6	100.8	40.5	44.3
1957:1	2091.7	121.8	603.8	621.9	253.9	153.1	89.5	73.8	291.1	1596.9	592.0	100.5	40.3	44.7
2	2087.2	119.3	607.4	626.5	251.9	153.2	89.4	73.9	292.6	1608.5	598.3	99.7	39.9	45.0
3	2108.6	116.5	615.9	630.4	254.9	156.9	89.2	76.9	294.4	1620.1	604.8	100.4	39.8	45.1
4	2082.2	117.2	612.4	637.9	250.4	153.0	88.6	74.2	292.2	1631.5	611.1	98.5	39.2	45.4
1958:1	2024.5	111.2	606.3	639.7	233.9	141.0	86.5	65.7	287.6	1643.1	617.4	95.0	38.7	45.8
2	2036.7	110.3	609.8	650.9	227.0	134.6	83.7	62.1	283.5	1652.8	619.4	93.2	38.8	46.9
3	2083.8	110.9	618.5	659.5	230.0	132.4	81.8	61.4	283.0	1662.3	621.3	94.0	39.4	47.6
4	2131.9	114.5	625.4	662.4	244.5	137.6	83.1	64.8	285.4	1671.9	623.3	95.3	39.7	48.0
1959:1	2176.2	122.0	633.2	670.9	258.8	141.2	82.8	68.8	289.4	1681.9	625.4	97.0	40.2	48.2
2	2234.5	126.9	634.8	683.0	268.4	146.5	85.3	70.8	296.9	1692.0	629.6	98.5	40.5	48.7
3	2233.5	128.3	639.4	692.9	272.1	151.6	87.8	73.0	299.0	1702.4	633.9	97.7	40.2	49.1
4	2243.9	122.2	641.8	702.6	269.0	151.4	87.2	73.1	303.6	1712.7	638.3	97.8	40.0	49.3
1960:1	2291.6	125.0	642.2	711.0	277.8	156.7	90.8	75.6	312.3	1722.6	642.4	98.3	40.2	50.1
2	2278.2	128.3	652.3	717.3	271.7	158.7	91.9	76.8	314.0	1734.0	647.1	98.2	39.8	49.8
3	2281.6	126.8	648.4	717.1	264.2	154.6	92.1	73.7	316.7	1745.5	651.6	97.5	39.6	50.3
4	2252.7	123.6	648.2	724.3	263.0	153.6	95.6	71.2	312.4	1757.5	656.0	96.2	39.1	50.3
1961:1	2266.8	116.4	654.5	731.5	259.9	150.6	95.2	68.7	309.9	1768.8	660.6	95.2	39.3	51.1
2	2306.3	116.8	660.5	744.7	263.2	153.2	93.6	71.7	310.5	1780.4	664.2	95.3	39.7	52.0
3	2347.1	119.2	660.8	748.3	269.6	154.5	93.6	72.7	315.0	1792.0	667.8	96.0	39.9	52.5
4	2395.9	124.6	670.0	761.5	278.7	159.8	93.1	77.1	318.6	1803.5	671.7	97.0	40.3	53.1
1962:1	2437.4	127.4	675.7	768.6	284.5	163.3	94.8	79.0	325.2	1815.3	675.1	97.3	40.3	53.8
2	2464.4	130.0	676.9	780.5	293.6	168.6	98.2	81.4	329.4	1827.5	680.8	98.8	40.5	53.6
3	2488.4	131.1	680.8	787.6	295.9	170.8	100.9	81.7	334.4	1840.1	686.8	98.6	40.4	54.2
4	2495.9	136.3	686.4	797.0	294.1	169.2	98.4	81.8	336.7	1852.4	693.0	98.2	40.2	54.6
1963:1	2526.9	139.0	689.0	801.2	297.2	168.7	95.0	83.2	340.9	1864.2	697.9	97.9	40.4	55.4
2	2555.5	141.5	691.9	810.1	310.5	173.7	99.4	84.7	344.6	1876.5	704.5	98.6	40.4	55.7
3	2604.0	143.1	695.2	826.0	318.4	178.8	100.1	88.4	349.9	1888.9	711.4	98.7	40.5	56.6
4	2622.9	145.0	697.3	837.3	328.5	184.5	102.1	92.0	353.1	1901.6	718.6	98.9	40.6	57.0
1964:1	2686.8	150.4	709.3	850.4	341.3	189.4	104.8	94.4	358.0	1913.4	725.1	98.6	40.4	58.5
2	2716.8	153.4	719.9	862.6	340.2	194.1	108.4	96.2	362.8	1927.9	734.3	99.6	40.7	58.6
3	2749.5	157.9	734.0	874.4	345.5	200.6	111.9	99.5	367.5	1942.8	743.7	99.9	40.7	59.1
4	2758.1	152.1	733.6	886.2	347.7	204.5	112.8	102.1	372.6	1957.8	753.5	100.7	40.8	58.8
1965:1	2830.0	166.1	741.2	894.6	364.0	218.7	118.6	110.4	382.1	1971.8	762.4	101.8	41.3	59.7
2	2868.2	166.3	750.3	907.5	373.8	226.6	126.9	112.1	388.6	1990.1	775.5	102.4	41.1	60.2
3	2918.9	171.9	760.1	919.8	383.7	235.0	128.2	118.2	395.0	2008.5	789.4	103.0	41.0	60.9
4	2988.6	177.6	783.4	936.3	392.2	244.9	134.1	122.9	400.3	2027.9	803.8	104.3	41.3	61.6
1966:1	3061.1	185.5	789.8	945.2	406.8	255.6	137.3	129.7	410.6	2045.0	816.7	105.8	41.5	62.2
2	3074.2	176.5	795.9	956.8	401.2	259.3	134.6	134.3	421.6	2064.2	833.5	106.7	41.4	61.9
3	3094.7	181.7	802.4	965.1	400.5	262.0	137.6	134.7	431.5	2083.8	850.3	107.2	41.3	62.0
4	3121.4	180.9	797.6	976.8	387.7	260.8	133.0	136.5	445.0	2102.8	867.4	107.6	41.1	62.3
1967:1	3145.9	177.4	806.3	989.7	378.3	255.0	134.3	130.9	454.9	2122.4	883.6	107.3	40.6	63.0
2	3147.7	185.4	810.6	1002.0	388.4	254.4	130.5	132.7	458.7	2140.3	897.7	106.7	40.4	63.3
3	3174.4	183.5	809.3	1015.6	392.6	253.4	131.8	131.0	466.4	2158.4	911.6	107.0	40.6	63.7
4	3197.5	182.8	814.8	1023.0	404.9	258.6	132.1	135.2	474.5	2176.5	925.9	107.2	40.6	64.1
1968:1	3256.2	194.3	830.7	1036.2	414.3	266.4	134.7	140.1	478.4	2194.9	939.8	107.2	40.6	65.2
2	3312.5	198.4	839.0	1053.6	412.0	261.6	133.5	136.8	485.3	2213.0	954.4	107.7	40.6	66.0
3	3337.3	206.8	853.1	1067.4	417.9	264.9	132.6	140.2	491.1	2231.0	969.3	108.6	40.8	66.0
4	3352.2	205.5	852.2	1080.9	428.1	272.7	135.4	145.0	497.5	2249.3	984.8	108.7	40.8	66.2

Tabella 2 – continuazione

Anno	GNP	Personal consumption expenditures			Fixed investment expenditures				Capital stocks			Labor input		Productivity (1)
		Durable goods	Non-durable goods	Services	Total	Nonresidential			Nonfarm inventories	Nonresidential structures	Nonresidential equipment	Total nonfarm hours (1)	Average weekly hours in mfg. (2)	
						Total	Structures	Equipment						
1969:1	3402.8	209.4	860.3	1092.5	441.2	280.4	137.4	150.2	504.9	2267.5	999.7	109.3	40.6	66.9
2	3410.3	208.1	864.5	1104.1	442.8	283.2	138.5	151.8	511.0	2286.5	1016.1	109.8	40.7	66.7
3	3428.5	208.1	866.1	1115.5	449.9	290.6	145.1	153.9	519.4	2306.4	1032.7	110.2	40.6	66.8
4	3411.4	207.0	869.7	1130.8	437.9	288.4	144.1	152.7	524.8	2326.2	1049.2	109.9	40.5	66.7
1970:1	3406.0	202.1	877.6	1141.8	435.5	285.9	143.0	151.4	524.9	2345.0	1065.5	108.8	40.2	67.2
2	3411.9	204.5	877.4	1148.4	425.6	284.3	141.5	150.9	527.8	2363.7	1078.6	107.7	39.9	68.1
3	3442.9	205.3	882.4	1161.9	433.2	285.8	142.1	151.8	532.7	2382.5	1091.7	106.3	39.7	69.6
4	3407.4	190.3	888.0	1169.8	434.1	275.3	140.4	143.9	533.0	2401.0	1104.2	105.0	39.5	69.7
1971:1	3503.3	210.7	891.4	1179.7	444.0	277.9	140.0	146.3	539.4	2419.9	1117.3	104.7	39.8	71.9
2	3524.3	215.7	891.7	1191.0	462.3	281.8	139.7	149.9	544.1	2437.6	1128.5	104.5	39.9	72.4
3	3544.7	221.6	890.1	1201.3	470.5	282.3	139.2	150.7	548.8	2455.3	1139.8	104.1	39.7	73.1
4	3556.0	230.6	896.1	1219.5	482.7	287.7	138.8	155.7	551.1	2472.9	1151.5	104.3	40.0	73.2
1972:1	3627.9	235.4	903.8	1239.1	504.7	297.6	142.4	161.7	554.7	2490.7	1162.5	104.8	40.3	74.4
2	3710.7	241.1	924.8	1252.1	513.6	302.5	143.2	165.5	561.5	2514.1	1177.4	105.4	40.6	75.6
3	3751.2	246.4	936.9	1267.4	519.2	307.3	143.5	169.6	570.5	2537.5	1192.8	105.5	40.6	76.4
4	3815.3	259.8	952.2	1291.2	543.6	323.6	145.7	182.5	576.5	2561.3	1209.3	106.2	40.7	77.2
1973:1	3921.5	276.5	959.9	1302.7	566.8	339.0	150.5	192.7	588.2	2584.5	1223.9	107.1	40.7	78.7
2	3950.4	270.8	952.0	1316.5	571.2	352.5	155.2	201.4	595.5	2604.6	1246.2	107.6	40.7	78.9
3	3944.1	268.0	959.5	1325.3	569.1	358.2	158.7	203.8	601.1	2625.1	1268.8	107.7	40.6	78.7
4	3984.4	260.9	956.2	1333.0	562.7	360.5	157.3	207.0	615.0	2645.4	1291.8	107.7	40.6	79.4
1974:1	3952.4	251.7	942.7	1335.9	549.4	360.2	156.4	207.4	623.7	2664.8	1313.2	107.5	40.4	79.0
2	3964.3	254.4	936.0	1348.2	541.0	359.2	155.8	206.9	630.7	2683.1	1333.9	106.7	39.9	79.8
3	3917.6	256.9	935.8	1354.5	530.9	354.5	149.1	207.9	633.4	2700.5	1354.7	106.5	40.1	79.0
4	3886.1	227.9	924.0	1366.1	499.6	343.6	147.3	199.4	646.8	2717.8	1374.6	105.0	39.6	79.5
1975:1	3827.3	234.1	925.5	1377.6	467.8	321.5	139.8	185.0	636.9	2736.1	1395.4	101.9	39.0	80.7
2	3861.8	238.3	943.4	1395.2	461.1	312.8	134.4	181.2	628.7	2750.4	1406.7	100.7	39.1	82.4
3	3936.1	254.3	951.2	1402.5	473.0	315.9	135.3	183.3	628.6	2764.7	1418.2	101.1	39.7	83.6
4	3987.9	262.6	954.2	1418.0	482.2	319.1	135.4	186.1	628.3	2779.1	1429.8	101.8	40.0	84.1
1976:1	4078.8	277.1	970.3	1436.1	502.4	324.9	139.1	188.6	636.1	2794.0	1441.4	102.7	40.3	85.3
2	4107.9	277.6	983.8	1445.7	510.6	328.4	138.6	192.2	646.7	2808.2	1454.1	102.7	40.0	85.9
3	4124.8	279.4	990.5	1461.7	515.5	335.4	140.1	197.4	654.2	2822.5	1467.0	102.5	40.1	86.4
4	4163.7	284.9	998.1	1484.7	541.9	341.6	140.5	202.7	660.4	2836.9	1480.4	103.0	40.0	86.8
1977:1	4219.4	297.3	1005.5	1497.2	564.1	357.6	141.8	216.3	667.5	2851.2	1492.8	103.1	40.1	87.9
2	4302.2	303.6	1003.8	1504.8	595.2	367.8	146.3	222.1	675.1	2866.6	1511.3	104.3	40.4	88.6
3	4371.2	307.9	1005.2	1527.1	602.3	374.6	148.3	226.8	687.0	2882.2	1530.3	105.1	40.4	89.3
4	4365.0	313.5	1020.4	1543.6	613.1	387.1	149.2	237.5	692.1	2897.9	1550.2	105.7	40.4	88.7
1978:1	4388.6	304.6	1025.1	1565.4	616.6	389.1	147.1	241.0	704.2	2912.8	1568.2	105.6	40.0	89.3
2	4546.1	327.5	1033.7	1587.6	660.2	421.0	159.8	260.3	714.9	2931.1	1593.7	108.2	40.6	90.2
3	4591.1	322.1	1042.8	1598.5	676.8	433.8	168.3	265.2	722.5	2950.4	1619.7	108.2	40.6	91.2
4	4649.0	323.8	1053.9	1605.7	689.5	446.5	174.3	272.1	733.6	2970.4	1646.3	109.0	40.6	91.7
1979:1	4652.6	320.5	1058.7	1625.0	695.1	456.8	174.3	281.6	740.8	2987.3	1669.9	109.0	40.5	91.7
2	4668.7	311.8	1053.9	1636.8	690.4	455.9	177.6	278.1	749.4	3009.2	1696.7	108.5	39.9	92.4
3	4708.8	318.8	1062.4	1641.5	702.6	470.3	186.5	284.1	751.2	3032.2	1724.1	109.3	40.2	92.6
4	4719.5	309.7	1071.5	1656.2	694.1	470.2	192.5	279.0	752.8	3055.9	1751.1	109.0	40.2	93.0
1980:1	4743.0	305.1	1068.4	1663.0	685.5	475.8	195.8	281.5	756.1	3077.3	1778.2	108.5	40.0	93.9
2	4625.6	268.6	1054.4	1653.0	622.5	450.4	191.1	261.5	757.8	3101.7	1797.0	106.7	39.3	93.1
3	4617.8	281.8	1052.4	1672.8	629.3	454.1	193.5	262.9	750.8	3126.4	1816.0	105.7	39.4	93.9
4	4696.6	290.8	1058.2	1694.0	656.3	464.3	199.8	267.1	751.3	3151.9	1835.2	106.5	40.0	94.7
1981:1	4787.7	299.4	1067.0	1682.1	660.7	471.3	198.6	274.9	760.6	3176.9	1855.4	106.8	40.0	96.3
2	4742.6	286.4	1068.1	1697.6	662.6	479.5	205.8	276.4	760.6	3204.4	1873.5	105.9	40.0	96.2
3	4801.4	296.0	1066.8	1700.8	661.5	490.7	210.7	282.7	769.6	3232.6	1891.9	105.0	39.8	98.2
4	4747.9	272.6	1068.1	1703.9	657.6	501.4	226.4	278.7	774.1	3262.8	1910.1	104.8	39.5	97.3
1982:1	4658.5	282.7	1067.6	1710.7	636.0	488.0	219.2	272.3	766.9	3289.3	1928.1	103.2	38.9	96.9
2	4682.9	282.0	1066.9	1718.1	612.8	469.6	211.9	261.2	764.5	3315.7	1937.6	102.5	39.0	98.1
3	4651.1	283.9	1073.3	1729.3	595.0	454.2	200.9	256.3	763.2	3340.8	1946.8	101.1	39.1	98.8
4	4655.6	297.3	1083.2	1754.6	597.7	445.5	197.0	251.5	751.3	3365.4	1955.9	100.0	39.0	100.0

Fonte: banca dati Citibase; NIPA, 1929-1997; "Summary fixed reproducible tangible wealth series, 1925-87", Survey of Current Business, 68; U.S. Bureau of Labor Statistics, Employment and Earnings, vari anni.

Costruzione di alcune serie

L'input di lavoro

La serie relativa al numero totale di ore di lavoro, *Total nonfarm hours*, è stata ottenuta come

$$\text{nonfarm hours} = \frac{\text{hours in nonagricultural establishments}}{\text{population (adult equivalent)}},$$

con i dati relativi alla popolazione che si ottengono modificando la serie *Total civilian noninstitutional population* (che include solo la popolazione maggiore di 16 anni) in modo da considerare solo la metà degli individui la cui età è inferiore a 21 anni o superiore a 64:

$$\text{adult equivalent} = \sum_{y=21}^{64} p(y) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{y<21} p(y) + \sum_{y>64} p(y) \right\},$$

dove $p(y)$ è il numero degli individui che hanno y anni.

Lo stock di capitale

Mentre la serie delle scorte (*Total nonfarm inventories*) è disponibile in NIPA con frequenza trimestrale, le altre serie sul capitale (*Nonresidential structures ed equipment*) sono fornite con frequenza annuale. Poiché tutti gli altri dati sono trimestrali, per calcolare le statistiche della tab. 1, è stato necessario rendere trimestrali anche queste serie, con la procedura illustrata di seguito.

1. Poiché i dati annuali sullo stock di capitale sono riferiti alla fine del periodo, si pone il valore del primo trimestre di ogni anno, dal 1954 al 1982, pari al valore dello stock nell'anno precedente (restano quindi da individuare i dati relativi agli ultimi tre trimestri di ogni anno). Se $\bar{K}(t)$ indica i valori dello stock di capitale nella serie annuale ($t=1953, 1954, \dots$) e $K(t, j)$ i valori della corrispondente serie trimestrale ($j=1, 2, 3, 4$), questo significa che si è posto $K(t+1, 1) = \bar{K}(t)$.

2. Si calcola, per ogni trimestre, la percentuale della spesa per investimenti sul totale dell'anno corrispondente. Indicando con $I(t, j)$ l'investimento nel j -esimo trimestre dell'anno t e con $i(t, j)$ le quote sul totale annuale, tali valori sono

$$i(t, j) = I(t, j) \left\{ \sum_{j=1}^4 I(t, j) \right\}^{-1}.$$

3. Si applica tale percentuale all'incremento che lo stock di capitale ha subito nell'anno considerato, sommando il risultato allo stock del trimestre precedente e ripetendo l'operazione per gli ultimi tre periodi di ogni anno,

$$K(t, j+1) = K(t, j) + i(t, j) [K(t+1, 1) - K(t, 1)] \quad j = 1, 2, 3.$$

Le tabelle che seguono raccolgono i risultati che si ottengono applicando le varie fasi appena esposte ai dati relativi allo stock di *Nonresidential structures* (per la serie *Nonres. equipment* si è proceduto esattamente nello stesso modo). Per questa serie i dati annuali sono

Anno	1953	1954	1955
Stock of nonres. structures $\bar{K}(t)$	1472.7	1508.6	1548.3

Seguendo le operazioni indicate ai punti 1-3, si ottiene

Anno:trim.	$I(t, j)$	1 $K(t, 1)$	2 $i(t, j)$	3 $K(t, j)$
1954:1	75.1	1472.4	0.2491	1472.40
1954:2	75.7	-	0.2509	1481.41
1954:3	75.6	-	0.2507	1490.49
1954:4	75.2	-	0.2493	1499.56
1955:1	77.6	1508.6	0.2400	1508.60
1955:2	79.5	-	0.2459	1518.13
1955:3	82.1	-	0.2541	1527.89
1955:4	84.0	-	0.2600	1537.98
1956:1	1548.3	1548.30
....

Appendice B – Programmi Matlab

```

% Standard.m
% Simula il modello "benchmark" di ciclo reale.
% Soluzione con il metodo "Fully Recursive" di Binder-Pesaran(1997).

clear all;

lambda = 1600; % parametro di smooth nel filtro HP

% valori calibrati
a = .36; % alpha quota del reddito al fattore capitale
b = .9856; % beta fattore di sconto soggettivo
f = 1.9885; % fi parametro che compare in u()=log(c)+fi*log(l)
d = .025; % delta tasso di deprezzamento del capitale
rho = 0.9459; % rho autocorrelazione dei residui di Solow z(t)
sde = 0.0071; % sigma deviazione standard delle innovazioni e(t)

%          CALCOLO DEI VALORI DI STEADY-STATE

g = 1/b+d-1; % variabile ausiliaria
h = (g*(1-a))/(g*(f-a+1)-f*a*d); % ore lavorate
k = ((g/a)^(1/(a-1)))*h; % stock di capitale
y = k^a*h^(1-a); % output
im = d*k; % investimenti
c = y-im; % consumo
wr = a*((k/h)^(1-a)); % salario reale

% Il sistema da risolvere è
% A00*x[t] = A10*x[t-1] + A01*E(x[t+1]|I[t]) + u[t]
% con u[t] = D0*z[t] + D1*E(z[t+1]|I[t])
% z[t] = rho * z[t-1] + e[t]
% Le variabili sono in deviazioni % dallo stato stazionario
% x(t) = Capitale(t+1)
% Ore lavorate(t)
% Consumo(t)
% Output(t)
% Investimenti(t)
% Salario Reale(t)
% z(t) = parametro tecnologico

% matrici dei coefficienti
A00 = zeros(6,6);
A10 = zeros(6,6);
A01 = zeros(6,6);
A00(1,3) = -c/y;
A00(1,4) = 1;
A00(1,5) = -im/y;
A00(2,1) = 1;
A00(2,2) = -(1-a)*k^(a-1)*h^(1-a);
A00(2,3) = c/k;
A00(3,2) = -(1-a);
A00(3,4) = 1;
A00(4,2) = a;
A00(4,6) = 1;
A00(5,1) = -b*(a-1)*a*k^(a-1)*h^(1-a);
A00(5,3) = -1;
A00(6,2) = h/(1-h);

```

```

A00(6,3) = 1;
A00(6,6) = -1;
A10(2,1) = a*k^(a-1)*h^(1-a)+(1-d);
A10(3,1) = a;
A10(4,1) = a;
A01(5,2) = b*(1-a)*a*k^(a-1)*h^(1-a);
A01(5,3) = -1;
D0 = zeros(6,1);
D1 = zeros(6,1);
D0(2,1) = k^(a-1)*h^(1-a);
D0(3,1) = 1;
D0(4,1) = 1;
D1(5,1) = b*a*k^(a-1)*h^(1-a);

%                                SOLUZIONE

% si trasforma il sistema in forma canonica:
% x[t] = A*x[t-1] + B*E(x[t+1]|I[t]) + w[t]
%     con w[t] = inv(A00)*D0*z[t] + inv(A00)*D1*E(z[t+1]|I[t])
B = inv(A00)*A01;
A = inv(A00)*A10;

% si risolve il sistema con il metodo "Fully Recursive"
N = 300;
% Comincia le ricorsioni
Q = eye(6);
R = A00\((D0*rho^N+D1*rho^(N+1)));
j = 1;
while j <= N
    R = B/Q*R+A00\((D0*rho^(N-j)+D1*rho^(N+1-j)));
    Q = eye(6)-B/Q*A;
    j = j+1;
end

crit = 1;
eps = .00000001;    % criterio di convergenza delle iterazioni
QN = Q;
RN = R;

while crit > eps
    Q = QN;
    R = RN;
    QN = eye(6);
    RN = A00\((D0*rho^(N+1)+D1*rho^(N+2)));
    j = 1;
    while j <= (N+1)
        RN = B/QN*RN+A00\((D0*rho^(N+1-j)+D1*rho^(N+2-j)));
        QN = eye(6)-B/QN*A;
        j = j+1;
    end
    crit = max(max(abs(QN\RN-Q\R)));
    N = N+1;
end

C = QN\A;
H = QN\R;

% Stampa i risultati
fprintf('\n La regola di decisione è: '),
fprintf('x[t] = C*x[t-1] + H*z[t] \n\n'),
disp('    x[t] = {k[t+1],h[t],c[t],y[t],i[t],w[t]}''');

```

```

fprintf('    z[t] è lo shock tecnologico')
fprintf('\n\n Le matrici dei coefficienti sono: \n'), C, H
disp('premere un tasto per iniziare la simulazione...')
pause

%                               SIMULAZIONE

noss = 116;    % numero di periodi (trimestri)
nsim = 2;     % numero di simulazioni del modello
lag = 2;
nl = 2*lag+1;
nm = noxx + 100;

isim = 1;
while isim <= nsim

% genera il progresso tecnologico (z) a partire dalle innovazioni (e)
mu = randn(nm,1);
tec = zeros(nm,1);
t = 2;
while t <= nm
    tec(t,1) = rho*tec(t-1,1) + mu(t,1)*sde;
    t = t+1;
end

% si generano le serie artificiali
z = zeros(nm,1);
z(:,1) = tec;
x = zeros(nm,6);
t = 2;
while t <= nm
    x(t,:) = (C*x(t-1,:)'+H*z(t,:))';
    t = t+1;
end

% correzioni dovute al fatto che le variabili sono in log
x(1,1) = log(k);
x(1,2) = log(h);
x(1,3) = log(c);    % si parte dallo Steady State
x(1,4) = log(y);
x(1,5) = log(im);
x(1,6) = log(wr);

% aggiungo il valore di steady-state
t = 2;
while t <= nm
    x(t,1) = x(t,1) + log(k);    % al tempo t si forma k(t+1)
    x(t,2) = x(t,2) + log(h);
    x(t,3) = x(t,3) + log(c);
    x(t,4) = x(t,4) + log(y);
    x(t,5) = x(t,5) + log(im);
    x(t,6) = x(t,6) + log(wr);
    t = t+1;
end

simaux = x(101:nm,:);    % non considero le prime 100 simulazioni
                        % per svincolarmi dalle condizioni iniziali
% si filtrano i dati con il metodo HP
sim = simaux - hpfilter(simaux,lambda);

```

```

%                               CALCOLO STATISTICHE D'INTERESSE

stdev(:,isim) = 100*std(sim)';      % deviazione standard (valori %)

% matrice delle cross-correlazioni (fino al lag 3)
gnp = sim(:,4);                    % seleziona la serie del gnp
for j = 1:6
    serie = sim(:,j);              % seleziona una delle altre serie
    temp = corrcoef(gnp,serie);
    crosstab(j,4,isim) = temp(2,1); % corr. contemporanea
    for lag = 1:3
        temp = corrcoef(gnp(1+lag:noss),serie(1:noss-lag));
        crosstab(j,4-lag,isim) = temp(2,1);
        temp = corrcoef(gnp(1:noss-lag),serie(1+lag:noss));
        crosstab(j,4+lag,isim) = temp(2,1);
    end
end

% matrice delle autocorrelazioni (fino al lag 5)
p = 0;
for p = 1:6
    autotab(p,:,isim)=acorf(sim(:,p),5);
end

% correlazione tra produttività e ore lavorate
temp = corrcoef(sim(:,2),sim(:,6));
corrzh(isim) = temp(2,1);

isim = isim+1;
end

%                               RISULTATI DI TUTTE LE ITERAZIONI

% deviazione standard
stdevend = mean(stdev');
stdevsd = std(stdev');
stdevrel = stdevend/stdevend(1,4);

% cross-correlazione con gnp
i = 0; j = 0;
crosstabend = zeros(6,7); crosstabsd = zeros(6,7);
for i = 1:6
    for j = 1:7
        crosstabend(i,j) = mean(crosstab(i,j,:));
        crosstabsd(i,j) = std(crosstab(i,j,:));
    end
end

% autocorrelazione
i = 0; j = 0;
autotabend = zeros(6,5); autotabsd = zeros(6,5);
for i = 1:6
    for j = 1:5
        autotabend(i,j) = mean(autotab(i,j,:));
        autotabsd(i,j) = std(autotab(i,j,:));
    end
end

% correlazione produttività-ore lavorate
corzh = mean(corrzh);
stdzh = std(corrzh);

```

Bibliografia

Banca dati *Citibase*.

Barro, R.J., 1978, "Unanticipated Money, Output and Price Level in the United States", *Journal of Political Economy*, 86, pp. 548-580.

Barro, R.J., 1981a, "The Equilibrium Approach to Business Cycles". In *Money, Expectations, and Business Cycle*, Academic Press, New York.

Binder, M., Pesaran, M.H., 1997, "Multivariate Linear Rational Expectations Models: Characterization of the Nature of the Solutions and their Fully Recursive Computation". Di prossima apparizione in *Econometric Theory*.

Cooley, T.F., Prescott, E.C., 1995, "Economic Growth and Business Cycles". In T.F. Cooley (ed.) *Frontiers of Business Cycle Research*, pp. 1-38.

"Employment and Earnings", vari anni, U.S. Department of Labor, Bureau of Labor Statistics.

Hodrick, R., Prescott, E.C., 1980, "Post-war U.S. Business Cycles: An Empirical Investigation", Carnegie-Mellon University Discussion Paper n. 451.

Kydland, F.E., Prescott, E.C., 1982, "Time to Build and Aggregate Fluctuations", *Econometrica*, 50, pp. 1345-1370.

Kydland, F.E., Prescott, E.C., 1996, "The Computational Experiment: An Econometric Tool", *Journal of Economic Perspectives*, 10, pp. 69-85.

Lucas, R.E., Jr., 1975, "An Equilibrium Model of the Business Cycle", *Journal of Political Economy*, 83, 1113-1144.

Lucas, R.E., Jr., 1977, "Understanding Business Cycles". In K. Brunner, A.H. Meltzer (ed.) "Stabilization of the Domestic and International Economy", *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 5, pp. 7-29.

Lucas, R.E., Jr., 1980, "Methods and Problems in Business Cycle Theory", *Journal of Money, Credit, and Banking*, 12, pp. 696-715.

Musgrave, J.C., 1986, "Fived Reproducible tangible wealth in the United States: Revised Estimates", *Survey of Current Business*, 66 (gennaio), pp. 51-75.

National Income and Product Accounts of the U.S., 1929-1997.

Prescott, E.C., 1986a, "Theory Ahead of Business Cycle Measurement", *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 10, pp. 9-22.

Prescott, E.C., 1986b, "Response to a Skeptic", *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review*, 10, pp. 28-33.

Solow, R.M., 1956, "A Contribution to the Theory of Economic Growth", *Quarterly Journal of Economics*, 70, pp. 65-94.

Solow, R.M., 1957, "Technical Change and the Aggregate Production Function", *Review of Economics and Statistics*, 39, pp. 312-320.

Summary fixed reproducible tangible wealth series, 1925-87, *Survey of Current Business*, 68 (ottobre), pp. 35-36.

Uhlig, H., 1999, "A Toolkit for Analyzing Nonlinear Dynamic Stochastic Models Easily". In Marimon-Scott (eds.) *Computational Methods for the study of Dynamic Economies*, Oxford University Press.