

QUADERNI



Università degli Studi di Siena

DIPARTIMENTO DI ECONOMIA POLITICA

CLAUDIO PACATI

La valutazione dei constant maturity bond

n. 310 - Novembre 2000

Sommario

Il presente lavoro studia il problema della valutazione del prezzo e della rischiosità dei cosiddetti *constant maturity bond*, titoli obbligazionari con cedola indicizzata all'evoluzione di un tasso swap di durata fissata. Si studia il contratto dal punto di vista teorico e si imposta il problema di valutazione nell'ambito del modello di Cox, Ingersoll e Ross univariato, risolvendolo con tecniche di simulazione Monte Carlo.

Parole e frasi chiave: constant maturity bond; titoli derivati obbligazionari; tassi interest rate swap; modello di Cox, Ingersoll e Ross.

classificazione JEL: E43; G13; C15.

classificazione MSC2000: 91B28; 65C30; 65C05.

Abstract

We study the valuation problem of price and basis risk of the so called *constant maturity bonds*, that are bonds with floating rate coupon, depending on the level of a swap rate of constant maturity. We study the contract from a theoretical point of view and we solve the valuation problem with Monte Carlo methods within the one-factor Cox, Ingersoll and Ross model.

Keywords and phrases: constant maturity bond; term structure derivatives; interest rate swap; Cox, Ingersoll, and Ross model.

JEL classification: E43; G13; C15.

MSC2000 classification: 91B28; 65C05.

Introduzione

Negli ultimi tempi la prassi delle emissioni obbligazionarie ha sviluppato una nuova moda: i *constant maturity bond* (CMB). Si tratta di titoli obbligazionari con cedole indicizzate in modo *puntuale* all'evoluzione temporale di un tasso interest rate swap di durata prefissata, a volte coincidente con la vita a scadenza del titolo. Si tratta naturalmente di una forma di indicizzazione *imperfetta*, perchè il tasso swap non coincide con il tasso di interesse a pronti di durata pari al periodo cedolare, né alla data di emissione del contratto, né nel corso della sua evoluzione. Gli effetti di questo fatto sono assolutamente non trascurabili dal punto di vista del valore del contratto – il CMB *non* quota alla pari alle date di stacco cedola –, ma soprattutto della rischiosità che, misurata nel linguaggio della *duration*, è sensibilmente più elevata di quella dei titoli ad indicizzazione perfetta, per i quali non supera mai la durata cedolare (si veda a tale proposito [2, cap. II.4]).

Il lavoro è articolato in sezioni. Nella sezione 1 si formalizza il contratto e si svolgono alcune considerazioni preliminari. Nella sezione 2 si imposta il problema di valutazione nell'ambito del modello di Cox, Ingersoll e Ross univariato (CIR) [3]. Nella sezione 3 si risolve il problema in forma integrale con tecniche di simulazione Monte Carlo. Nella sezione 4 si applicano i risultati alla valutazione di un contratto emesso da una banca italiana.

1 La formalizzazione del contratto

Si consideri, all'istante t di valutazione, il CMB di durata m anni e che paga p cedole all'anno, ciascuna indicizzata al tasso swap di durata n anni, rilevato sul mercato alla data di inizio del periodo cedolare. Sia $t_0 \leq t$ la data di emissione del contratto e sia $\tau = 1/p$ la durata (in anni) del periodo cedolare. Si assuma inoltre, senza perdita di generalità, che la data di valutazione preceda la data di pagamento della prima cedola, ovvero che sia $t < t_0 + \tau$.

Lo scadenziario del contratto è dato dal vettore di scadenze $\mathbf{t} = \{t_0 + \tau, t_0 + 2\tau, \dots, t_0 +$

Lavoro svolto nell'ambito del programma di ricerca di rilevante interesse nazionale cofinanziato dal MURST "Modelli per la finanza matematica".

Prima versione: 19 luglio 1999; versione corrente: 1 novembre 2000.

$pm\tau\}$. Per semplicità di notazione si denoterà con $t_k = t_0 + k\tau$ la scadenza della k -esima cedola.

Se si indica con $i_{\text{sw}}(a; b)$ il tasso di interest rate swap standard, ovvero del tipo fisso a un anno contro variabile¹, in vigore sul mercato al tempo a per la scadenza b anni (b intero positivo), è noto che valgono le relazioni

$$\begin{aligned} i_{\text{sw}}(a; b) &= \frac{1 - v(a, a + b)}{\sum_{k=1}^b v(a, a + k)} , \\ &= \frac{1 - [1 + i(a, a + b)]^{-b}}{\sum_{k=1}^b [1 + i(a, a + k)]^{-k}} , \end{aligned} \quad (1)$$

dove si è indicato con $v(a, a + k)$ e $i(a, a + k)$ il fattore di sconto ed il tasso a pronti in base annua, rispettivamente, in vigore al tempo a per la scadenza $a + k$.²

Se si assume che il capitale nominale del CMB sia C , la cedola che verrà pagata al tempo t_k può essere scritta come

$$X_k = \tau C i_{\text{sw}}(t_{k-1}; n) = \tau C \frac{1 - v(t_{k-1}, t_{k-1} + n)}{\sum_{h=1}^n v(t_{k-1}, t_{k-1} + h)} , \quad (2)$$

ed è una variabile aleatoria che diverrà nota solo alla data t_{k-1} ; in particolare la prima cedola X_1 è nota dalla data di emissione. Alla scadenza del contratto, in $t_{nm} = t_0 + m$, oltre alla cedola X_{pm} verrà rimborsato anche il capitale nominale C .

Nel caso particolare $p = 1$ e $n = 1$ il contratto degenera in un contratto perfettamente indicizzato al tasso a pronti a 1 anno, mentre nel caso $p = 1$ e $m = 1$, essendo nota la prima ed unica cedola, il contratto degenera in un titolo a cedola nulla.

La tipologia ora descritta è la versione “pura” del CMB. Più spesso, al posto dell’intera cedola indicizzata, viene contrattualmente previsto il pagamento ad ogni scadenza t_k di una frazione β costante della cedola indicizzata, con $\beta > 0$ (e, al limite, non necessariamente minore di 1). Naturalmente, oltre alla presenza del fattore β , potrebbe essere fissato contrattualmente anche uno *sperad* costante σ , sì che la forma più generale della cedola indicizzata pagabile al tempo t_k risulta

$$Y_k = \beta X_k + \sigma C . \quad (3)$$

Per concludere la rassegna sulle varie “varianti” del contratto CMB, si possono avere contratti di tipo “misto”, nei quali alcune delle cedole sono indicizzate ad un tasso swap,

¹È noto che la periodicità della gamba variabile, purché perfettamente indicizzata, non è rilevante per la determinazione del tasso swap.

²Per un’esposizione dettagliata sui contratti e sui tassi swap ci si può riferire a [8].

mentre altre sono a tasso fisso, contrattualmente stabilito. È questo il caso del titolo che verrà considerato nella sezione 4.

Per valutare il CMB basta valutare la generica cedola X_k , perché, anche nel caso generale di cedola del tipo (3), la valutazione dell'intero contratto segue dalla linearità del valore, conseguenza del principio di arbitraggio; in simboli, se si indica con $V(t)$ il valore al tempo t del CMB, risulta che, nel caso di CMB con cedole “pure”

$$V(t) = \sum_{k=1}^{pm} V(t, X_k) + Cv(t, t_0 + m) , \quad (4)$$

mentre nel caso generale di cedole del tipo (3) si ha che

$$V(t) = \beta \sum_{k=1}^{pm} V(t, X_k) + Cv(t, t_0 + m) + \sigma C \sum_{k=1}^{pm} v(t, t_k) . \quad (5)$$

2 Il problema di valutazione

Al di fuori di un modello di evoluzione del mercato non è possibile ottenere un'espressione per le (4) e (5), né svolgere considerazioni sulla rischiosità o sulla *duration* del CMB. L'aleatorietà delle cedole non ne permette infatti la valutazione con semplici tecniche di sconto e non è disponibile una tecnica metodologicamente corretta per trasformare le cedole indicizzate in flussi di importi deterministici equivalenti, come invece accade per i titoli perfettamente indicizzati ad un tasso di interesse a pronti (cfr. [2, cap. II.4]). Per lo stesso motivo non è possibile applicare lo schema “semideterministico” (cfr. [5, cap. III] e [2, parte prima]) neppure per quanto riguarda la determinazione della *duration*.

Per semplicità di notazione d'ora in poi ci limiteremo al caso di CMB “puri”, ovvero con cedole del tipo (2), e con periodicità cedolare annuale ($p = 1$ e quindi $\tau = 1$). Tutti i risultati si estenderanno in modo immediato al caso più generale.

Per impostare il problema di valutazione, si consideri un modello di mercato obbligazionario perfetto, privo di opportunità di arbitraggi non rischiosi e con evoluzione diffusiva del tasso locale di interesse (annualizzato) $r(t) = \lim_{s \rightarrow t+} \delta(t, s)$, dove $\delta(t, s) = -\partial \log v(t, s) / \partial s$ è l'intensità istantanea di interesse (annualizzata); sia

$$dr = \mu(r(t), t) dt + \sigma(r(t), t) dZ(t) \quad (6)$$

l'equazione differenziale stocastica che governa l'evoluzione del tasso locale di interesse, nella quale Z è un moto Browniano standard e $\mu(r, t)$ e $\sigma(r, t)$ sono le funzioni (deterministiche) di drift e di diffusione, rispettivamente, che assumeremo sufficientemente regolari sì che l'equazione differenziale stocastica (6) ammetta un'unica soluzione con la condizione iniziale $r(0) = 0$. Se si indica con $q(r(t), t)$ il prezzo di mercato del rischio, allora la dinamica neutrale al rischio del tasso locale di interesse segue l'equazione differenziale stocastica

$$dr = [\mu(r(t), t) + q(r(t), t)\sigma(r(t), t)] dt + \sigma(r(t), t) dZ^*(t) ,$$

dove Z^* è un moto Browniano standard ottenuto tramite un'opportuna trasformazione di Z .

Un'applicazione standard del principio di arbitraggio (si veda ad esempio [6, cap. 7F]) mostra che, in questo contesto modellistico, il valore in t della cedola indicizzata pagabile in t_k ammette l'espressione in forma integrale

$$V(t, X_k) = E_t^* \left[X_k e^{-\int_t^{t_k} r(u) du} \right] = CE_t^* \left[\frac{1 - v(t_{k-1}, t_{k-1} + n)}{\sum_{j=1}^k v(t_{k-1}, t_{k-1} + j)} e^{-\int_t^{t_k} r(u) du} \right] \quad (7)$$

(dove E_a^* indica l'operatore di aspettativa neutrale al rischio e condizionata all'informazione disponibile alla data a), oppure in forma differenziale, essendo $V(t, X_k) = f(r(t), t)$ la soluzione del problema alle derivate parziali nel dominio $[0, +\infty) \times [t, t_{k-1}]$, con condizione al contorno $[0, +\infty) \times \{t_{k-1}\}$

$$\begin{cases} \mathcal{D}f(r, u) = 0 & \text{se } t \leq u < t_{k-1}, \\ f(r, u) = X_k v(u, t_k) & \text{se } u = t_{k-1}, \end{cases} \quad (8)$$

dove $\mathcal{D}$ rappresenta l'operatore differenziale

$$\mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial t} + [\mu(r, u) + q(r, u)\sigma(r, u)] \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{2}[\sigma(r, u)]^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} - r .$$

Nel modello di mercato considerato, la rischiosità $\Omega(t)$ della cedola indicizzata è data dalla sua semielasticità (cambiata di segno) rispetto alla variabile di stato

$$\Omega(t, X_k) = -\frac{1}{V(t, X_k)} \frac{\partial}{\partial r} V(t, X_k) .$$

Un'applicazione standard del lemma di Itô e del principio di arbitraggio mostra infatti che il coefficiente di diffusione della dinamica del valore della cedola è proprio

$V(t, X_k)\Omega(t, X_k)\sigma(r(t), t)$. Pertanto $\Omega(t, X_k)$ è quel fattore del rendimento istantaneo $dV(t)/V(t)$ che incorpora le caratteristiche specifiche della cedola indicizzata.

La linearità del valore induce la seguente relazione fra la rischiosità $\Omega(t)$ del CMB e le rischiosità delle singole cedole indicizzate:

$$\Omega(t) = \frac{1}{V(t)} \left[\sum_{k=1}^m V(t, X_k)\Omega(t, X_k) - C \frac{\partial}{\partial r} v(t, t_m) \right] .$$

Nel caso di indicizzazione “spuria” del tipo (3) alla formula precedente vanno applicate le ovvie modifiche.

Il modello di Cox, Ingersoll e Ross univariato rientra nella categoria dei modelli di tipo (6) considerati, con drift $\mu(r(t), t) = \alpha[\gamma - r(t)]$, coefficiente di diffusione $\sigma(r(t), t) = \rho\sqrt{r(t)}$ e prezzo di mercato del rischio $q(r(t), t) = \pi\sqrt{r(t)}/\rho$. La dinamica neutrale al rischio del tasso locale è pertanto

$$dr(t) = \alpha^*[\gamma^* - r(t)] dt + \rho\sqrt{r(t)} dZ^*(t) , \quad (9)$$

dove $\alpha^* = \alpha - \pi$ e $\gamma^* = \alpha\gamma/\alpha^*$. I fattori di sconto del modello sono nella forma

$$v(t, s) = A(s - t) e^{-r(t)B(s-t)} , \quad (10)$$

dove, per ogni $x > 0$,

$$A(x) = \left[\frac{d e^{\varphi x}}{\varphi(e^{dx} - 1) + d} \right]^\nu , \quad B(x) = \frac{e^{dx} - 1}{\varphi(e^{dx} - 1) + d} ,$$

essendo

$$d = \sqrt{\alpha^{*2} + 2\rho^2} , \quad \varphi = \frac{\alpha^* + d}{2} , \quad \nu = 2\frac{\alpha\gamma}{\rho^2}$$

i parametri alla Brown-Dybvig [1] (riparametrizzazione della versione neutrale al rischio del modello).

Nell’ambito del modello CIR è possibile esprimere la rischiosità Ω in modo più direttamente interpretabile. A tal fine, la *duration stocastica* di un contratto con rischiosità Ω è

$$D = B^{-1}(\Omega) = \frac{1}{d} \log \frac{2 - (\alpha^* - d)\Omega}{2 - (\alpha^* + d)\Omega}$$

ed è definita a patto che esista il membro destro dell’espressione. Si tratta di un cambiamento (non lineare) della scala temporale della rischiosità; contrariamente alla *duration*

di Macaulay, la *duration stocastica* incorpora tutta la rischiosità del contratto (cfr. [4], (cfr. [5, cap. IV-V] e [2, parte seconda]) e risulta pertanto un indicatore completo.

È interessante affrontare il problema della valutazione anche in modo “inverso”. Come si vedrà infatti nella prossima sezione, all’emissione il CMB puro quota normalmente sopra la pari; l’emittente può allora decidere di abbassarne il valore, rendendolo “spurio”, tipicamente per riportarlo alla pari. Da questo punto di vista, il problema inverso a quello della valutazione è quello di determinare il livello β di equilibrio, ovvero il valore di β che permette di emettere il CMB “spurio” alla pari. Partendo dalla (4) e ponendo $t = t_0$, $\sigma = 0$ e $p = 1$, si ottiene immediatamente che il livello β di equilibrio è dato da

$$\beta = C \frac{1 - v(t_0, t_0 + m)}{\sum_{k=1}^m V(t_0, X_k)} , \quad (11)$$

dove X_k è la cedola indicizzata in modo “puro” e dipende dalla durata dello swap indicizzante. Pertanto anche il livello β di equilibrio dipende da n , oltre che, ovviamente, dalla durata m del contratto.

3 La valutazione Monte Carlo

Non sono disponibili soluzioni in forma chiusa (tranne che per i casi degeneri $m = 1$ ed $n = 1$), né per la (7) né per la (8). Si procederà pertanto alla soluzione della (7) con tecniche numeriche di simulazione Monte Carlo.

Fissata la data di valutazione t al 20 maggio 1999, il modello è stato anzitutto stimato sulla cross-section dei tassi swap Euribor a quella data (media denaro/lettera delle quotazioni chiusura relative ai 15 contratti standard con durate 1, 2, ..., 10, 12, 15, 20, 25, 30 anni). La procedura di stima, di tipo Brown-Dybvig [1], è basata sull’ipotesi che

$$\sum_{k=1}^{\ell} i_{\text{sw}}(t; n) v(t, t + k) + v(t, t + n) = 1 + \varepsilon_{\ell} , \quad \forall \ell = 1, \dots, 10, 12, 15, 20, 25, 30, \quad (12)$$

dove i residui ε_{ℓ} sono ipotizzati normalmente distribuiti i.i.d.. La (12) è basata sulla riscrittura della (1), interpretando i tassi swap come tassi nominali di titoli a cedola fissa quotati alla pari (*par yield*). Per ulteriori dettagli sulla metodologia di stima si veda [9]. Per la data di valutazione scelta si sono ottenuti i seguenti valori del tasso locale, dei parametri aggiustati per il rischio e dei parametri alla Brown-Dybvig

$$r(t) = 0.0200051995 ,$$

$$\begin{aligned}\alpha^* &= 0.1313741269 \quad , & d &= 0.2378848541 \quad , \\ \gamma^* &= 0.0196650213 \quad , & \varphi &= 0.1846294905 \quad , \\ \rho &= 0.1402320266 \quad , & \nu &= 1.1480895486 \quad ,\end{aligned}$$

con uno scarto quadratico medio dei residui della stima $\sqrt{\frac{1}{11} \sum \varepsilon_\ell^2} = 0.2478789805$. La struttura per scadenza dei tassi di interesse prodotta dai parametri stimati è riportata graficamente nella figura 1, nella quale, per un confronto visuale della bontà della stima, sono riportati anche i tassi swap quotati e quelli prodotti dal modello.

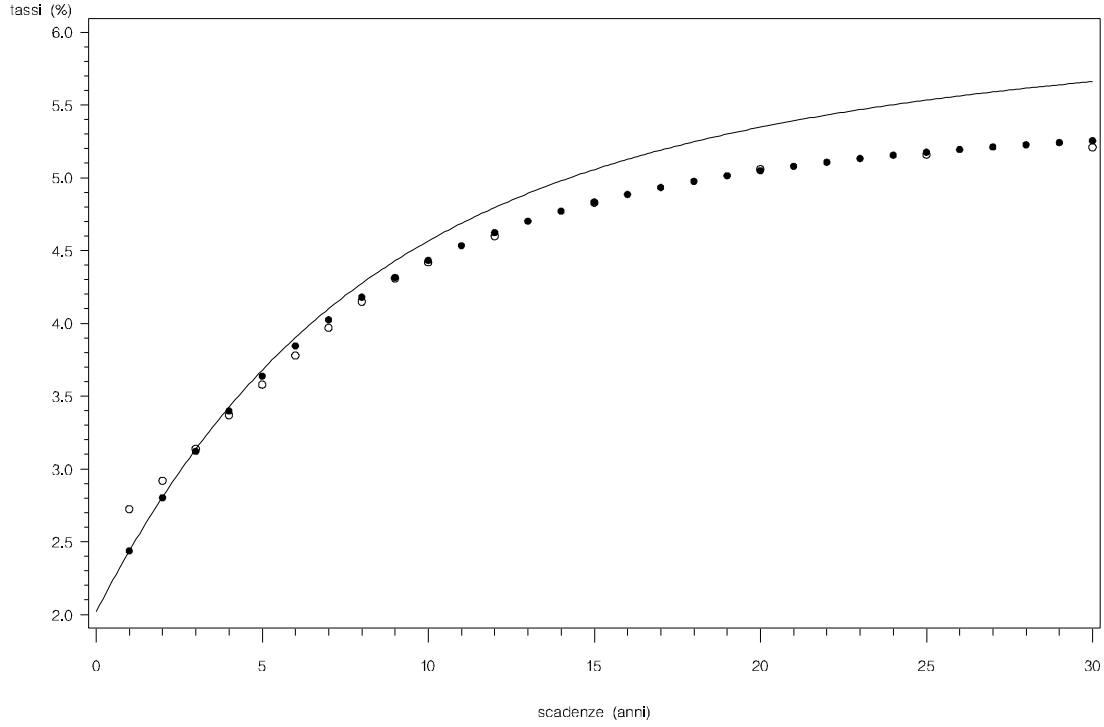


Figura 1: Tassi swap di mercato ($\circ$), di modello ($\bullet$) e tassi a pronti – 20 maggio 1999

La simulazione Monte Carlo è stata effettuata discretizzando la (9) secondo lo schema di Eulero stocastico (cfr. [7, ch. 14]). Sono stati considerati, alla data t ed in riferimento al capitale nominale $C = 100$, i 900 contratti CMB a cedola annuale che si ottengono per tutte le possibili combinazioni di durata del contratto $m = 1, 2, \dots, 30$ anni e di durata dello swap indicizzante $n = 1, 2, \dots, 30$ anni, ponendo inoltre $t_0 = t$. Di ciascun pagamento previsto da ognuno dei 900 contratti (prima cedola nota, cedole indicizzate e rimborso del capitale) è stato calcolato il valore in t , simulando 10 000 traiettorie dello schema di Eulero stocastico, con passo di discretizzazione temporale semisettimanale. Per ridurre la varianza della stima (e quindi l'errore standard) è stato utilizzato il metodo

Tabella 1: Valore dei CMB a cedola annuale – valutazione al 20 maggio 1999

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
1	100.00(.0000)	100.00(.0023)	100.00(.0102)	100.00(.0252)	100.01(.0457)
2	100.36(.0000)	100.66(.0020)	100.91(.0087)	101.12(.0212)	101.30(.0383)
3	100.67(.0000)	101.23(.0017)	101.69(.0074)	102.07(.0180)	102.40(.0322)
4	100.94(.0000)	101.72(.0014)	102.36(.0063)	102.89(.0152)	103.34(.0272)
5	101.17(.0000)	102.14(.0012)	102.93(.0054)	103.59(.0130)	104.14(.0231)
6	101.37(.0000)	102.50(.0011)	103.43(.0046)	104.18(.0111)	104.82(.0197)
7	101.55(.0000)	102.82(.0009)	103.85(.0040)	104.69(.0096)	105.39(.0170)
8	101.70(.0000)	103.09(.0008)	104.21(.0035)	105.13(.0084)	105.89(.0147)
9	101.83(.0000)	103.32(.0007)	104.53(.0031)	105.51(.0073)	106.31(.0129)
10	101.95(.0000)	103.53(.0006)	104.80(.0027)	105.83(.0065)	106.68(.0113)
n	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
1	100.00(.0675)	99.99(.0867)	99.99(.1026)	99.98(.1138)	99.99(.1215)
2	101.45(.0562)	101.57(.0717)	101.68(.0840)	101.78(.0923)	101.87(.0975)
3	102.67(.0470)	102.91(.0594)	103.11(.0690)	103.28(.0751)	103.45(.0785)
4	103.71(.0394)	104.03(.0495)	104.30(.0570)	104.54(.0614)	104.75(.0635)
5	104.59(.0333)	104.97(.0415)	105.30(.0474)	105.59(.0505)	105.84(.0517)
6	105.34(.0283)	105.77(.0350)	106.15(.0397)	106.47(.0419)	106.76(.0424)
7	105.97(.0242)	106.45(.0298)	106.86(.0335)	107.21(.0351)	107.52(.0351)
8	106.51(.0209)	107.03(.0256)	107.46(.0285)	107.84(.0296)	108.17(.0293)
9	106.97(.0182)	107.52(.0221)	107.98(.0245)	108.37(.0251)	108.71(.0247)
10	107.37(.0160)	107.94(.0193)	108.42(.0212)	108.82(.0216)	109.18(.0210)

delle variabili antitetiche. La valutazione dell'intero contratto è stata quindi ottenuta per linearità.

I risultati della valutazione per i casi $m \leq 10$ ed $n \leq 10$ sono riportati nella tabella 1 a pagina 8, dove, a fianco di ciascun valore, è riportato tra parentesi il relativo errore standard della stima Monte Carlo. La prima colonna della parte superiore della tabella e le prime righe di entrambe le parti si riferiscono ai due casi degeneri $m = 1$ ed $n = 1$. Nel primo caso i contratti degenerano in titoli a cedola nulla, che potrebbero essere valutati senza bisogno di ricorrere alla simulazione: gli errori standard della stima sono infatti oltre la quarta cifra decimale. Nel secondo caso i CMB degenerano in titoli perfettamente indicizzati e quindi, avendo impostato la valutazione alla data di emissione ($t = t_0$), il loro valore teorico è alla pari, mentre i valori ottenuti per simulazione se ne discostano poco. Nei rimanenti casi si sono ottenuti errori standard della stima che sono estremamente contenuti rispetto a quelli che si ottengono normalmente nella valutazione Monte Carlo di altre tipologie di contratti derivati con il modello CIR. Questo fatto suggerisce che i CMB siano scarsamente sensibili ad effetti di volatilità

Tabella 2: Rischiosità dei CMB a cedola annuale – valutazione al 20 maggio 1999

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$
1	0.934(.0000)	0.935(.0444)	0.936(.0771)	0.937(.0842)	0.938(.0790)
2	0.934(.0000)	0.989(.0248)	1.037(.0461)	1.076(.0521)	1.108(.0500)
3	0.934(.0000)	1.041(.0144)	1.131(.0285)	1.205(.0332)	1.264(.0325)
4	0.934(.0000)	1.088(.0087)	1.217(.0181)	1.322(.0217)	1.406(.0216)
5	0.934(.0000)	1.132(.0054)	1.295(.0118)	1.428(.0144)	1.534(.0146)
6	0.934(.0000)	1.171(.0035)	1.365(.0078)	1.522(.0098)	1.647(.0101)
7	0.934(.0000)	1.205(.0022)	1.428(.0053)	1.606(.0067)	1.747(.0070)
8	0.934(.0000)	1.236(.0015)	1.483(.0036)	1.680(.0047)	1.836(.0049)
9	0.934(.0000)	1.264(.0010)	1.532(.0025)	1.746(.0033)	1.914(.0035)
10	0.934(.0000)	1.288(.0007)	1.575(.0018)	1.803(.0024)	1.983(.0026)
n	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
1	0.938(.0695)	0.938(.0592)	0.938(.0498)	0.937(.0416)	0.936(.0346)
2	1.133(.0446)	1.154(.0383)	1.170(.0324)	1.182(.0272)	1.192(.0226)
3	1.312(.0294)	1.350(.0255)	1.380(.0217)	1.403(.0183)	1.421(.0152)
4	1.473(.0198)	1.526(.0173)	1.568(.0148)	1.600(.0125)	1.625(.0105)
5	1.617(.0135)	1.683(.0119)	1.735(.0103)	1.775(.0087)	1.806(.0073)
6	1.745(.0094)	1.822(.0084)	1.882(.0072)	1.929(.0061)	1.965(.0051)
7	1.859(.0066)	1.945(.0059)	2.013(.0051)	2.065(.0044)	2.105(.0037)
8	1.958(.0047)	2.053(.0042)	2.127(.0037)	2.184(.0031)	2.227(.0026)
9	2.046(.0034)	2.148(.0031)	2.228(.0027)	2.288(.0023)	2.335(.0019)
10	2.123(.0025)	2.232(.0022)	2.316(.0020)	2.380(.0017)	2.430(.0014)

I due grafici della figura 2 a pagina 10 illustrano invece tutti e 900 i valori ottenuti. Si osserva che gli andamenti qualitativi di monotonia (rispetto alle due variabili n ed m) già osservabili nella tabella 1, sono confermati anche per durate più lunghe.

Anche le rischiosità dei CMB considerati sono state ottenute per simulazione, approssimando l'operatore di derivazione $\frac{\partial}{\partial r}$ con la derivata numerica simmetrica. I risultati sono riportati nella tabella 2 a pagina 9, limitatamente ai casi $m \leq 10$ e $n \leq 10$; anche in questa tabella i valori tra parentesi sono gli errori standard della stima che, come nel caso precedente, sono molto contenuti; si possono inoltre ripetere considerazioni analoghe a quelle svolte per i valori. Le stesse rischiosità, trasformate in duration (stocastiche), sono riportate nella tabella 3 a pagina 12, mentre i due grafici della figura 3 a pagina 11 illustrano le duration di tutti e 900 i contratti considerati. Si può osservare che i CMB presentano rischiosità che, pur essendo più elevate di quelle dei titoli perfettamente indicizzati a tassi a pronti, sono comunque minori di quelle di titoli a tasso fisso di pari durata. Infatti, nel caso dei titoli perfettamente indicizzati con cedola annuale, avendo posto la data di valutazione coincidente con la data di emissione, la duration è sempre

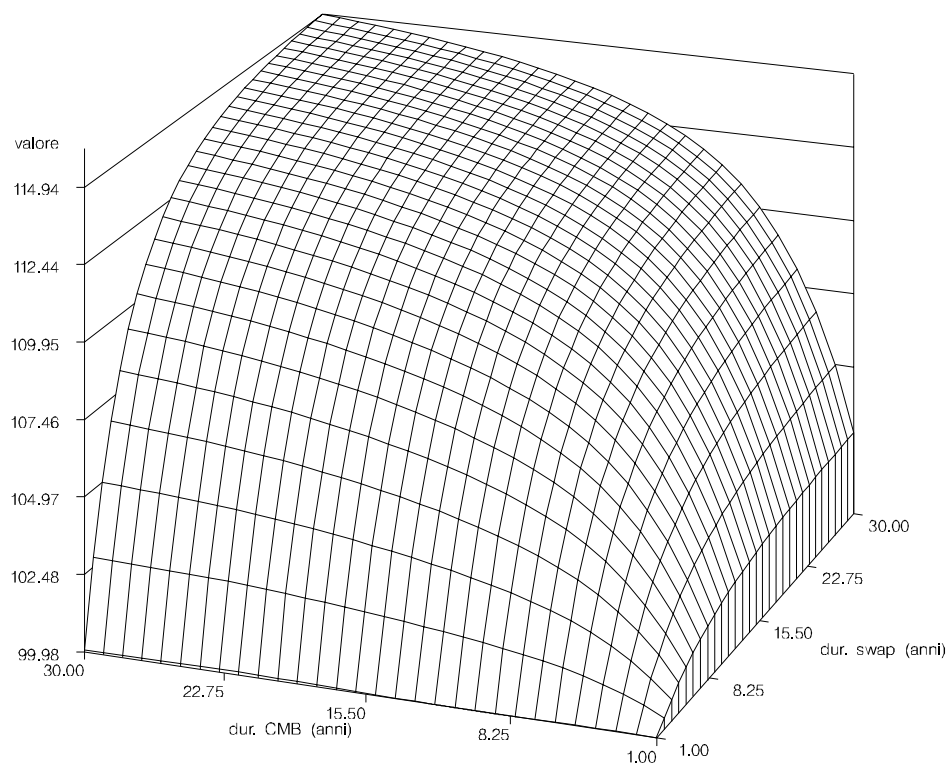
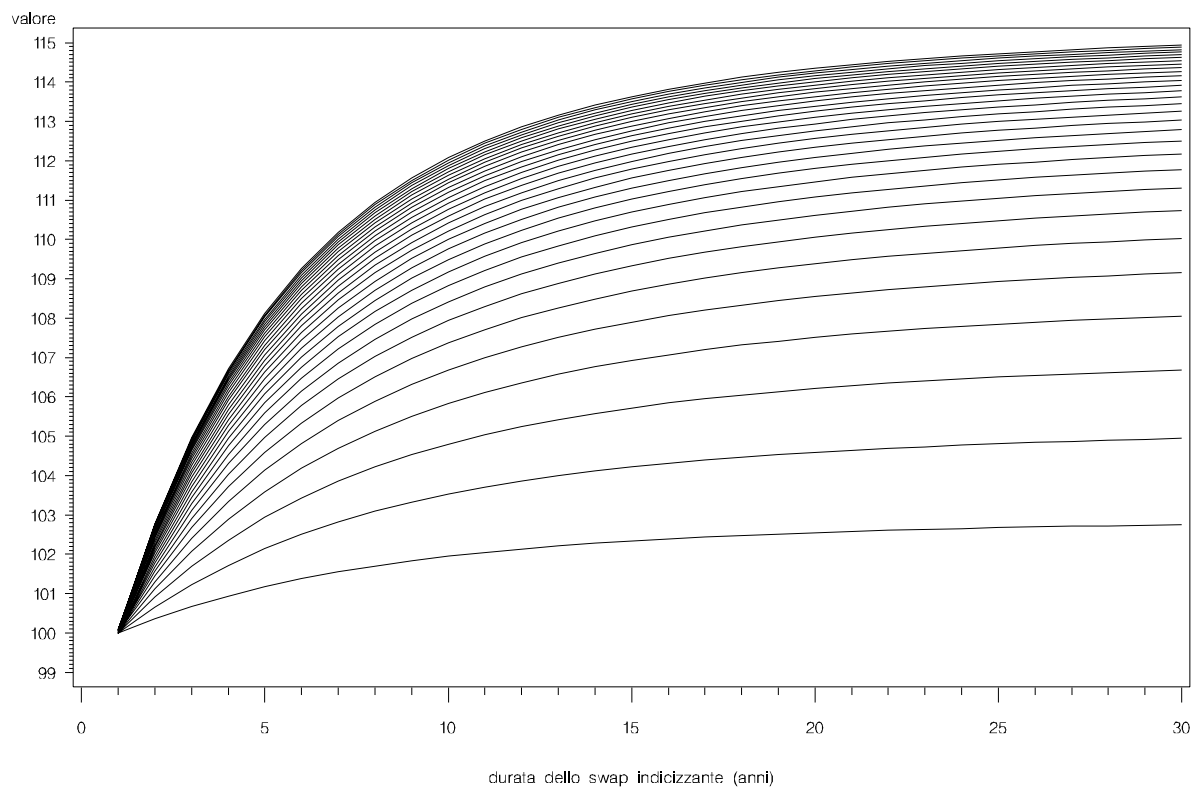


Figura 2: Valore dei CMB – valutazione al 20 maggio 1999

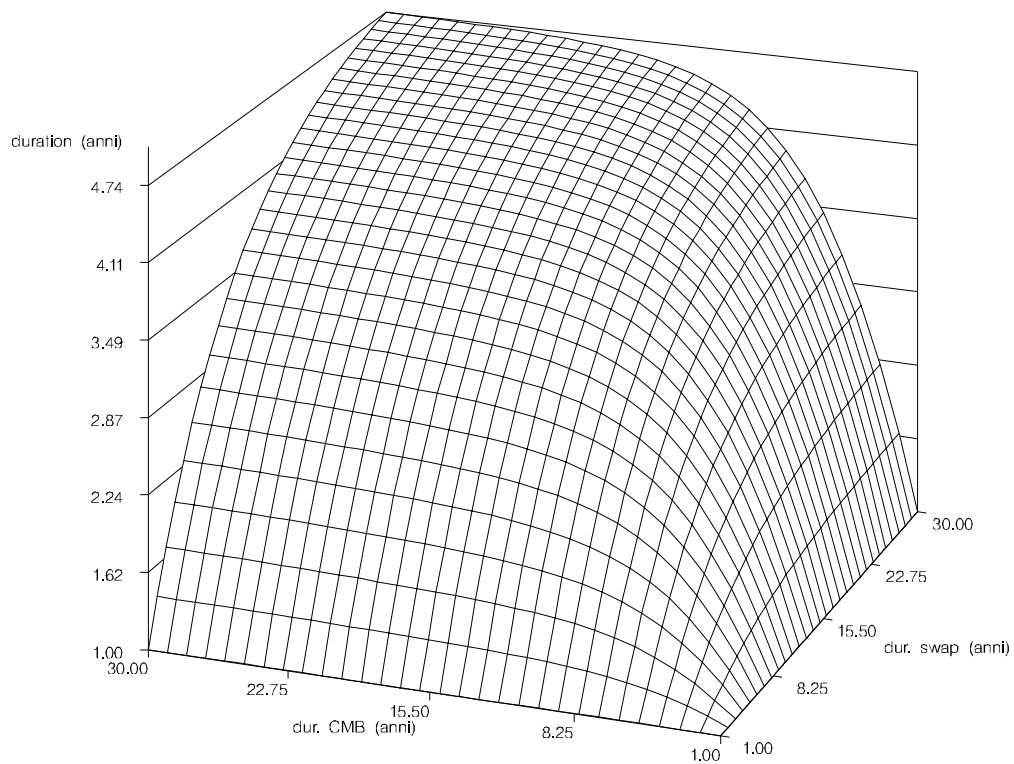
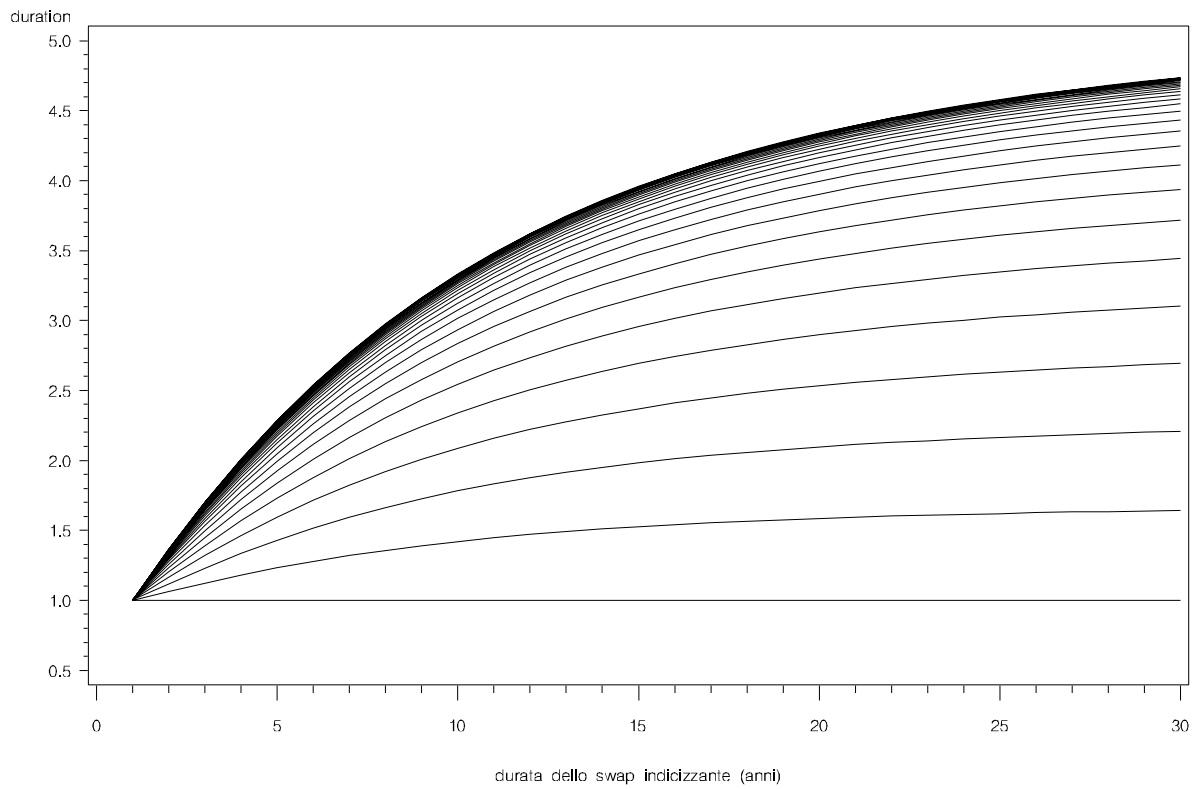


Figura 3: Duration dei CMB – valutazione al 20 maggio 1999

Tabella 3: Duration dei CMB a cedola annuale – valutazione al 20 maggio 1999

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
1	1.000	1.001	1.002	1.003	1.004	1.004	1.004	1.004	1.003	1.002
2	1.000	1.064	1.119	1.165	1.203	1.233	1.258	1.277	1.292	1.303
3	1.000	1.124	1.230	1.319	1.391	1.450	1.497	1.534	1.563	1.586
4	1.000	1.180	1.334	1.462	1.567	1.652	1.720	1.773	1.816	1.848
5	1.000	1.231	1.429	1.594	1.729	1.839	1.926	1.994	2.049	2.091
6	1.000	1.278	1.516	1.715	1.877	2.009	2.114	2.197	2.262	2.313
7	1.000	1.320	1.594	1.823	2.012	2.164	2.285	2.381	2.456	2.515
8	1.000	1.357	1.664	1.921	2.133	2.303	2.440	2.548	2.632	2.698
9	1.000	1.391	1.727	2.009	2.241	2.429	2.579	2.698	2.791	2.864
10	1.000	1.421	1.783	2.088	2.339	2.542	2.705	2.834	2.935	3.014

Tabella 4: Livelli β di equilibrio per i CMB a cedola annuale – valutazione al 20 maggio 1999

n	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$	$m = 9$	$m = 10$
1	100.00	99.91	99.95	99.99	99.96	100.00	100.03	100.05	100.05	100.04
2	86.97	89.09	90.68	91.85	92.70	93.41	93.97	94.42	94.77	95.05
3	78.09	81.45	83.96	85.87	87.30	88.47	89.41	90.16	90.77	91.27
4	71.73	75.83	78.95	81.34	83.19	84.68	85.89	86.87	87.68	88.34
5	67.01	71.57	75.10	77.84	79.98	81.72	83.14	84.29	85.25	86.04
6	63.39	68.27	72.08	75.08	77.44	79.37	80.94	82.24	83.31	84.20
7	60.57	65.66	69.68	72.86	75.40	77.47	79.18	80.58	81.75	82.72
8	58.31	63.57	67.73	71.07	73.73	75.93	77.73	79.22	80.47	81.51
9	56.49	61.86	66.14	69.59	72.36	74.65	76.54	78.11	79.42	80.52
10	55.00	60.45	64.82	68.36	71.22	73.59	75.55	77.18	78.54	79.69

pari ad 1, indipendentemente dalla durata del titolo. Nel caso di titoli a tasso fisso con cedola annuale, considerando il caso di quotazione alla pari (il che equivale a dire che il tasso nominale annuo coincide con il tasso swap relativo alla durata del titolo), la duration stocastica varia e, con semplici calcoli, si vede facilmente che, nei casi $m = 1, 3, 5, 7, 10, 15, 20$ e 30 anni, vale rispettivamente 1, 2.896, 4.555, 5.876, 7.155, 7.921, 8.009 e 7.910 anni.

Nella tabella 4 a pagina 12 sono riportati i valori dei fattori β di equilibrio per i CMB, limitatamente ai casi $m \leq 10$ e $n \leq 10$. I valori sono stati ottenuti applicando la (11); si tratta essenzialmente di una trasformazione in percentuali di retrocessione delle cedole degli scarti dalla parità dei valori della tabella 1. Nei grafici della figura 4 a pagina 13 sono illustrati i beta di equilibrio per tutti i 900 CMB considerati.

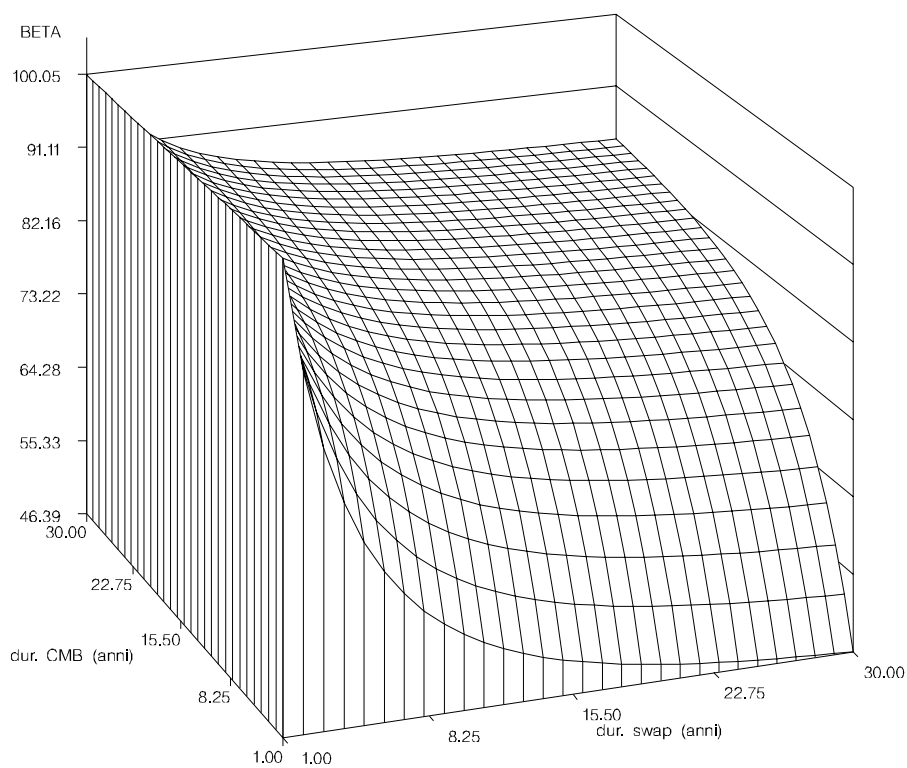
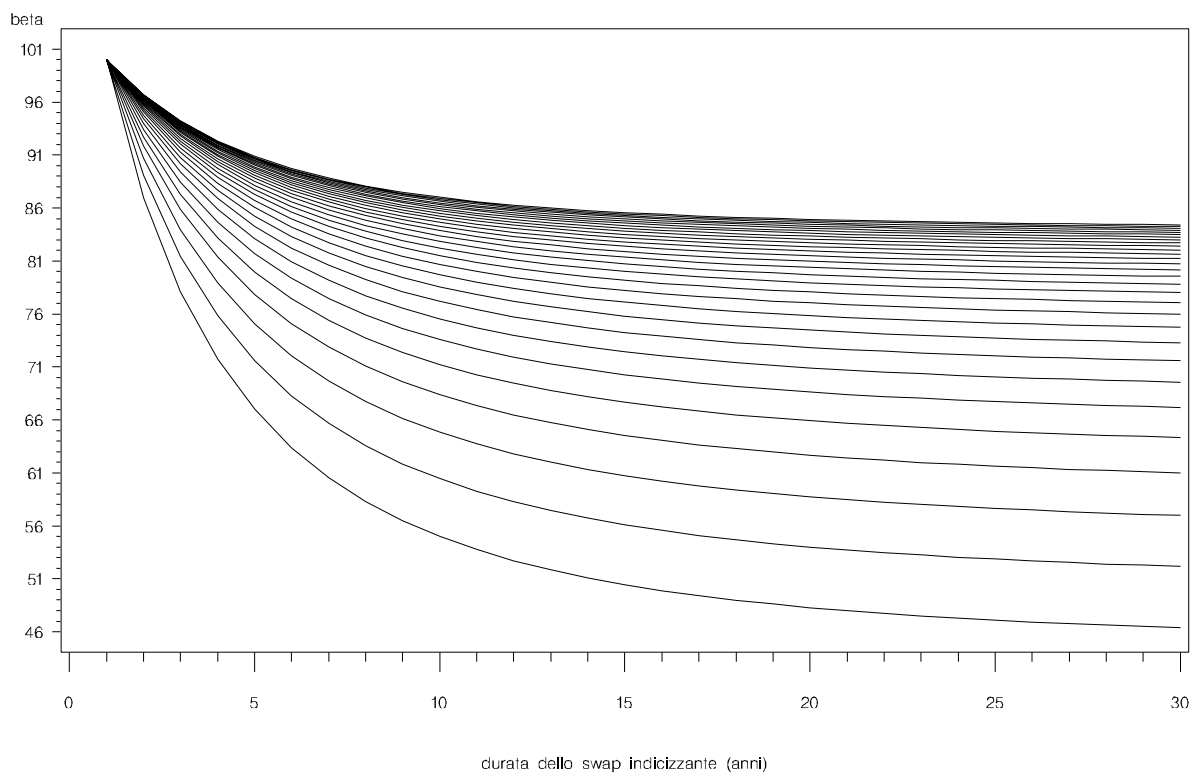


Figura 4: Livelli β di equilibrio per i CMB – valutazione al 20 maggio 1999

4 Un esempio dalla prassi operativa

Questa sezione è dedicata alla valutazione del prestito obbligazionario “Mediobanca 1999–2019 step down indicizzato al tasso swap euro 30 anni”, codice ISIN IT0001339586, emesso il 25 giugno 1999 per un ammontare totale di 75 milioni di euro di nominale. Si tratta di un titolo a cedola annuale di durata ventennale e, nel linguaggio della sezione 1, è di tipo misto; prevede infatti che le prime cinque cedole siano a tasso fisso decrescente, contrattualmente fissato al 10%, 6%, 5%, 4% e 4%, rispettivamente, mentre le successive 15 cedole sono indicizzate al tasso swap a 30 anni in modo “spurio”, con $\beta = 67\%$ e $\sigma = 0$.

La valutazione del contratto all’emissione si effettua nel modo illustrato nella sezione precedente, con l’unica variante che bisogna considerare il livello $\beta = 67\%$ e sostituire le prime 5 cedole indicizzate con le cedole note contrattualmente previsto.

La stima alla data $t = 25/06/1999$ del modello, effettuata secondo le modalità descritte nella sezione precedente, ha prodotto i parametri

$$\begin{aligned} r(t) &= 0.0258245262 \ , \\ \alpha^* &= 0.1544298531 \ , \quad d = 0.2450901747 \ , \\ \gamma^* &= 0.0817760471 \ , \quad \varphi = 0.1997600139 \ , \\ \rho &= 0.1345745411 \ , \quad \nu = 1.3946381892 \ , \end{aligned}$$

con uno scarto quadratico medio dei residui della stima di 0.1372089848.

Nella tabella 5 a pagina 15 si propone il risultato analitico della valutazione Monte Carlo. Si può notare come il $\beta = 67\%$ applicato alle ultime 15 cedole abbassi il valore al di sotto della pari. Il livello di equilibrio per il β di questa tipologia contrattuale, ferme restando le prime 5 cedole fisse, si calcola con una semplice modifica della (11) e risulta $\beta' = 81.45\%$.

Tabella 5: Valutazione del prestito obbligazionario “Mediobanca 1999–2019 step down indicizzato al tasso swap euro 30 anni” al 25 giugno 1999 (data di emissione)

	posta	valore	rischiosità	duration
cedola	1	9.71	0.924	1.000
cedola	2	5.61	1.703	2.000
cedola	3	4.48	2.351	3.000
cedola	4	3.42	2.882	4.000
cedola	5	3.25	3.315	5.000
cedola	6	3.30	0.572	0.599
cedola	7	3.16	0.416	0.430
cedola	8	3.02	0.341	0.350
cedola	9	2.87	0.297	0.304
cedola	10	2.72	0.270	0.276
cedola	11	2.57	0.251	0.256
cedola	12	2.43	0.238	0.243
cedola	13	2.29	0.229	0.233
cedola	14	2.16	0.222	0.226
cedola	15	2.03	0.217	0.220
cedola	16	1.91	0.213	0.216
cedola	17	1.80	0.210	0.213
cedola	18	1.69	0.207	0.211
cedola	19	1.59	0.206	0.209
cedola	20	1.49	0.204	0.208
capitale		30.96	4.970	20.000
totale		92.45	3.632	5.897

Riferimenti bibliografici

- [1] Brown S.J., Dybvig P.H., *The Empirical Implications of the Cox, Ingersoll, Ross Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Journal of Finance **41**(3), 1986.
- [2] Castellani G., De Felice M., Moriconi F., Mottura C., *Un corso sul controllo del rischio di tasso di interesse*, società editrice il Mulino, Bologna 1993.
- [3] Cox J.C., Ingersoll J.E. jr., Ross S.A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, Econometrica **53**(1985), 385–407.
- [4] De Felice M., Moriconi F., *Modelli stocastici univariati della struttura a termine dei tassi di interesse. Indici temporali per la gestione del rischio di tasso*, Liguori Editore, Napoli 1988.
- [5] De Felice M., Moriconi F., *La teoria dell’immunizzazione finanziaria. Modelli e strategie*, società editrice il Mulino, Bologna 1991.

- [6] Duffie D., *Dynamic Asset Pricing Theory – 2nd ed.*, Princeton University Press, Princeton NJ 1996.
- [7] Kloden P.E., Platen E., *Numerical Solutions of Stochastic Differential Equations*, Springer Verlag, Berlin 1992.
- [8] Miron P., Swannell P. *Pricing and Hedging Swaps*, Euromoney Books, London 1991.
- [9] Pacati C., *Estimating the Euro Term Structure of Interest Rates*, relazione presentata alla riunione scientifica del gruppo di ricerca MURST “Modelli per la finanza matematica” (Roma 1999), preprint 1999.