UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA

FACOLTA' DI ECONOMIA

DIPARTIMENTO DI METODI QUANTITATIVI

SERIE RICERCA

Lonzi Marco
Riccarelli Samuele

I progetti d'investimento puri: ulteriori analisi e proprietà.

Siena - Dicembre 2001

1 – INTRODUZIONE

La condizione di purezza del Tasso Interno di Rendimento (T.I.R.) riveste un ruolo importante per la significatività economica e finanziaria del criterio di scelta per i progetti che sul T.I.R. è basato, come si vede, [7] , dall'ampia letteratura sull'argomento.

Essa assicura infatti non solo l'unicità del T.I.R., ma pure la massimizzazione del Valore Attuale del progetto, nonché l'esistenza di un'unica scomposizione del progetto globale in progetti monoperiodali, tutti della stessa natura economica (di investimento o finanziamento).

Si studiano in questa nota ulteriori proprietà dei progetti puri, determinando condizioni atte a mantenere, in caso di prolungamento del progetto, tale proprietà.

Si analizzano infine particolari sottoinsiemi della classe dei progetti puri.

2 – DEFINIZIONI PRELIMINARI

Riportiamo definizioni e risultati, già noti in letteratura, che saranno usati in questa nota.

Definizione 1: Diremo progetto (d'investimento) una sequenza di flussi di cassa netti $\mathrm{a}_k \in \mathbb{R}$, che si rendono disponibili alle epoche $k : 0 \leq k \leq n$, con $n \geq 1$, ovvero un vettore $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, con gli a_k tali che:

$$\begin{cases} \mathrm{a}_0 < 0, \\ \mathrm{a}_n \neq 0, \\ \mathrm{a}_j \cdot \mathrm{a}_k < 0, \text{ per almeno una coppia } j, k \end{cases} .$$

Definizione analoga può essere data per i progetti per i quali $\mathrm{a}_0 > 0$, che verranno detti di finanziamento, .

Quando non sia soddisfatta la Definizione 1, parleremo semplicemente di vettore (di flussi di cassa).

Definizione 2: Si dice monoperiodale un progetto del tipo:

$\mathbb{A}_0^1 \in \mathbb{R}^2$: $\mathbb{A}_0^1 = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1)$, $\mathrm{a}_0 \cdot \mathrm{a}_1 < 0$,

ovvero, nel caso più generale, un progetto del tipo:

$\mathbb{A}_k^{k+1} \in \mathbb{R}^2$: $\mathbb{A}_k^{k+1} = (\mathrm{a}_k,\mathrm{a}_{k+1})$, $\mathrm{a}_k \cdot \mathrm{a}_{k+1} < 0$.

Supponendo che sia possibile arrestare la vita economica di un progetto $\mathbb{A}_0^n$ alla fine di un qualunque periodo, ad esempio il k-esimo, $0 < k < n$, avremo la:

Definizione 3: Si dice troncamento del progetto $\mathbb{A}_0^n$ ogni vettore $\mathbb{A}_0^k \in \mathbb{R}^{k+1}$:

$\mathbb{A}_0^k = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_{k-1},\mathrm{a}_k)$, con $k < n$.

Definizione 4: Si dice sottoprogetto di $\mathbb{A}_0^n$ ogni suo troncamento $\mathbb{A}_0^k$, $0 < k < n$, che soddisfi alla Definizione 1.

Definizione 5: Si dice coda di $\mathbb{A}_0^n$, e lo indicheremo con $\mathbb{A}_k^n$, ogni vettore del tipo:

$\mathbb{A}_k^n = (\mathrm{a}_k,\mathrm{a}_{k+1},...,\mathrm{a}_n) \in \mathbb{R}^{n-k+1}$, $0 < k < n$.

Supponendo che sia possibile prolungare la vita economica di un progetto $\mathbb{A}_0^n$ dalla sua fine, al tempo n, fino ad un qualunque periodo successivo, ad esempio l'$(n+k)$-esimo, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, diamo la

Definizione 6: Si dice prolungamento $\mathbb{A}_0^{n+k}$ di $\mathbb{A}_0^n$ il vettore $\mathbb{A}_0^{n+k} \in \mathbb{R}^{n+k+1}$:

$\mathbb{A}_0^{n+k} = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_n,\mathrm{a}_{n+1},...,\mathrm{a}_{n+k})$, con $\mathrm{a}_{n+k} \neq 0$.

Definizione 7: Dati $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\mathbb{B}_0^m = (\mathrm{b}_0,\mathrm{b}_1,...,\mathrm{b}_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$, si dice unione (temporale) di $\mathbb{A}_0^n$ e $\mathbb{B}_0^m$ il vettore:

$$\mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m = (\mathrm{c}_0,\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_k,...,\mathrm{c}_{n+m+1}) \in \mathbb{R}^{n+m+2}, \text{ con } \mathrm{c}_k = \begin{cases} \mathrm{a}_k & \text{se } k \leq n \\ \mathrm{b}_{k-n-1} & \text{se } k > n \end{cases}.$$

Dato $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_n)$, indichiamo con $\mathbb{A}_n^0$ il vettore $\mathbb{A}_n^0 = (\mathrm{c}_0,\mathrm{c}_1,...,\mathrm{c}_n)$, $\mathrm{c}_i = \mathrm{a}_{n-i}$.

Il Valore Attuale del progetto $\mathbb{A}_0^n$ al tasso i sarà dato da

$$\mathbb{V}_n(i) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \mathrm{a}_j \cdot (1+i)^{-j},$$

mentre il suo Montante (o Saldo) sarà dato da

$$\mathbb{S}_n(i) \ = \ \sum_{j=0}^{n} \mathrm{a}_j \cdot (1+i)^{n-j} \ .$$

Indicheremo il Valore Attuale del sottoprogetto $\mathbb{A}_0^k$ con $\mathbb{V}_k(i)$ e quello del prolungamento $\mathbb{A}_0^{n+k}$ con $\mathbb{V}_{n+k}(i)$, ed i loro Montanti (o Saldi) rispettivamente con $\mathbb{S}_k(i)$ e con $\mathbb{S}_{n+k}(i)$.

Ricordiamo che un progetto è detto semplice quando i suoi flussi di cassa non nulli hanno tutti segno diverso da a_0, mentre è detto di investimento in senso stretto se i flussi di cassa negativi precedono quelli positivi.

3 – PROPRIETA´ GENERALI DEI PROGETTI D'INVESTIMENTO

Vale anzitutto la

Definizione 8: Chiamasi T.I.R. del progetto un tasso i_0 per il quale $\mathbb{S}_n(i_0) \ = 0$.

Si definiscono per ogni progetto $\mathbb{A}_0^n$, le quantità:

$$\mathfrak{U}_k(i) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_{n-j} \cdot (1+i)^{j-k}, \ 0 \leq k \leq n-1,$$

che rappresentano il Valore Attuale, al tempo $n-k$, dei flussi di cassa della coda $\mathbb{A}_{n-k}^n$, e le quantità:

$$\mathfrak{S}_k(i) = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_{n-j} \cdot (1+i)^j \ , \ 0 \leq k \leq n-1,$$

che rappresentano il Saldo, a partire dal tempo $n-k$, dei flussi di cassa della coda $\mathbb{A}_{n-k}^n$.

Come detto in [14] e [15], da $\mathrm{a}_0 < 0$ segue $\lim\limits_{i \to +\infty} \mathbb{S}_k(i) = \ -\infty, \forall k : 0 < k \leq n$, e quindi vale la seguente:

Proposizione 1: Dato $\mathbb{A}_0^n = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1,...,\mathrm{a}_{n-1},\mathrm{a}_n)$, esiste un valore i_- tale che:

$i \in \left[i_- \,; +\infty\right[\Rightarrow \mathbb{S}_k(i) \le 0, \forall k : 0 \le k < n.$

Risulta di immediata verifica la

Proposizione 2: $i_- = -1 \Leftrightarrow$ $a_n \cdot a_k \le 0, \forall\, k : 1 \le k \le n.$

Essendo $\lim\limits_{i \to -1^+} \mathfrak{U}_{n-k}(i) = \infty$, con il segno di a_n, $\forall\, k : 0 \le k \le n-1$, come detto in [9] e [8], vale la:

Proposizione 3: Dato $\mathbb{A}_0^n = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$, con $a_n > 0$, esiste i_+ tale che:

$i \in \left]-1; i_+\right] \Rightarrow \mathfrak{U}_{n-k}(i) \ge 0, \forall\, k : 0 < k \le n-1.$

Proposizione 4: $i_+ = +\infty \Leftrightarrow$ $a_0 \cdot a_k \le 0, \forall\, k : 0 < k \le n.$

I valori i_- e i_+ vengono denotati anche con i_{min} e i_{max}.

I valori i_- e i_+ possono essere introdotti anche partendo da un problema diverso, quello della massimizzazione del Valore Attuale del progetto, [1], o quello della minimizzazione del Saldo delle sue code; essendo $\mathbb{V}_n(i) - \mathbb{V}_{n-j-1}(i) = \frac{1}{(1+i)^{n-j}} \cdot \mathfrak{U}_j(i)$, avremo:

$\mathbb{V}_n(i) \ge \mathbb{V}_{n-j-1}(i) \Leftrightarrow \mathfrak{U}_j(i) \ge 0$

e quindi risulta di immediata verifica la

Proposizione 5: Dato $\mathbb{A}_0^n = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$, con $a_n > 0$, esiste i_+ tale che:

$i \in \left]-1; i_+\right] \Rightarrow \mathbb{V}_n(i) \ge \mathbb{V}_k(i), \forall\, k : 0 < k \le n-1.$

Quindi in ogni progetto d'investimento, con $a_0 \cdot a_n < 0$, il Valore Attuale del progetto è maggiore di quello di tutti i suoi sottoprogetti, almeno fino ad un certo valore, ovvero i_+.

In maniera simile, essendo $\mathfrak{S}(i) - \mathfrak{S}_{j-1}(i) = (1+i)^j \cdot \mathbb{S}_{n-j}(i)$, avremo:

$\mathfrak{S}(i) \le \mathfrak{S}_{j-1}(i) \Leftrightarrow \mathbb{S}_{n-j}(i) \le 0$

e quindi risulta di immediata verifica la

Proposizione 6: Dato $\mathbb{A}_0^n = (a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n)$, esiste un valore i_- tale che:

$i \in \left[i_- \,; +\infty\right[\Rightarrow \mathfrak{S}(i) \le \mathfrak{S}_{j-1}(i), \forall\, k : 0 \le k < n.$

Quindi in ogni progetto d'investimento ($a_0 < 0$), il Saldo del progetto è minore di quello di tutte le sue code, almeno da un certo valore, i_-, in poi.

Osserviamo infine che la condizione $a_0 \cdot a_n < 0$ è sufficiente ad assicurare l'esistenza di almeno un T.I.R. $i_0 > -1$.

4 – I PROGETTI PURI E LE LORO PROPRIETA´

Seguendo quanto fatto in [13], [14], [15] e [4], ricordiamo anzitutto la:

Definizione 9: Un progetto d'investimento $\mathbb{A}_0^n$ si dice puro al dato tasso i se i suoi sotto-progetti $\mathbb{A}_0^k$, $0 \leq k \leq n-1$, presentano Saldi, a quel tasso i, non positivi:

$$\mathbb{S}_k(i) \;=\; \sum_{j=0}^{k} \mathrm{a}_j \cdot (1+i)^{k-j} \;\leq 0,\; \forall\, k : 0 \leq k \leq n-1.$$

Scriveremo:

- $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}(i)$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0$ è puro al tasso i,
- $\mathbb{A}_0^n \in T(i_0)$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0^n$ ammette i_0 quale suo T.I.R.,
- $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0^n$ è puro nel suo T.I.R.,
- $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0)$ per indicare che il progetto $\mathbb{A}_0^n$ è puro nel suo T.I.R. i_0.

Vale, vedi [13] e [4], la seguente:

Proposizione 7: Se $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0)$, allora il T.I.R. i_0 è unico.

Come detto in [3], [4], [5] e [9], se $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0)$, allora $\mathbb{A}_0^n$ può essere decomposto in un'unico modo come una successione di n progetti uniperiodali consecutivi:

$$\mathbb{A}_{k-1}^k = \Big\{\mathbb{S}_{k-1}(i_0); -(1+i_0)\cdot \mathbb{S}_{k-1}(i_0)\Big\},\, 1 \leq k \leq n,$$

tutti valutati al medesimo tasso i_0, in quanto:

$$\mathbb{S}_0(i_0) = \mathrm{a}_0,$$
$$\mathbb{S}_k(i_0) - (1+i_0)\cdot \mathbb{S}_{k-1}(i_0) = \mathrm{a}_k,$$
$$(1+i_0)\cdot \mathbb{S}_{n-1}(i_0) + \mathrm{a}_n = 0.$$

Come detto in [9], vale la

Proposizione 8: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0) \;\Rightarrow\; \mathrm{a}_0 \cdot \mathrm{a}_n < 0.$

E' facile vedere, come detto in [10], che tutti i progetti semplici e tutti i progetti in senso stretto sono puri nel loro T.I.R..

Dato che $\mathbb{S}_n(i) = (1+i)^{n-k-1}\cdot(\mathbb{S}_k(i)\cdot(1+i) + \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{n-k-1}(i))$, e dato che $\mathbb{S}_n(i_0) = 0$, come detto in [9] e [8], vale la seguente:

Proposizione 9: Sia $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0)$, allora:

$\mathbb{S}_k(i_0) \leq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{n-k}(i_0) \geq 0, \forall\, k : 0 \leq k \leq n-1$, da cui segue:

$\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0) \Leftrightarrow \boldsymbol{\mathfrak{U}}_{n-k}(i_0) \geq 0, \forall\, k : 0 \leq k \leq n-1.$

Vale infine, vedi [9] e [8], la seguente:

Proposizione 10: Sono equivalenti le seguenti condizioni:

a) $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0)$

b) $\mathbb{S}_n(i_-) \geq 0$

c) $\mathfrak{U}_0(i_+) \leq 0$

d) $i_- \leq i_+$, e risulta inoltre: $i_- \leq i_0 \leq i_+$.

Come conseguenza della Proposizione 5 e della Proposizione 10 si dimostra, vedi [8], la

Proposizione 11: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_0) \Rightarrow \mathbb{V}_n(i) \geq \mathbb{V}_k(i), i \in]-1; i_+], i_0 \leq i_+, 0 \leq k < n.$

5 – L'INSIEME DEI T.I.R. DI UN PROGETTO

Detto $\mathcal{T}\left(\mathbb{A}_0^n\right)$ l'insieme dei T.I.R. del progetto $\mathbb{A}_0^n$, sia $\mathcal{T}_s\left(\mathbb{A}_0^k, 0 < k \leq n\right)$ l'insieme dei T.I.R. del progetto $\mathbb{A}_0^n$ e di tutti i suoi troncamenti $\mathbb{A}_0^k$.

Indicato con $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ l'insieme delle soluzioni $x > -1$ dell'equazione $\mathcal{E}(x) = 0$, si ha che $\mathcal{T}\left(\mathbb{A}_0^n\right) = \mathcal{R}(\mathbb{S}_n(i))$, mentre $\mathcal{T}_s\left(\mathbb{A}_0^k, 0 < k \leq n\right) = \mathcal{R}(\mathbb{S}_k(i), 0 < k \leq n)$.

Ovviamente $\mathcal{T}\left(\mathbb{A}_0^n\right) \subseteq \mathcal{T}_s\left(\mathbb{A}_0^k, 0 < k \leq n\right)$.

Valgono le seguenti:

Proposizione 12: $i_- =$ Max $\left\{\mathcal{T}_s\left(\mathbb{A}_0^k, 0 < k \leq n-1\right)\right\}$.

Dimostrazione: basta osservare che $i_- =$ Max $\{\mathcal{R}(\mathbb{S}_k(i), 0 < k \leq n-1)\}$.

Proposizione 13: $i_+ =$ Min $\left\{\mathcal{T}_s\left(\mathbb{A}_k^1, 1 < k \leq n\right)\right\}$.

Dimostrazione: basta osservare che $i_+ =$ Min $\{\mathcal{R}(\mathfrak{U}_{n-k}(i), 0 < k \leq n-1)\}$.

Proposizione 14: $i_- \in \mathcal{T}\left(\mathbb{A}_0^k\right), 0 < k \leq n \Rightarrow \mathbb{A}_0^k \in \mathcal{P}T(i_-)$.

Per la dimostrazione di questa si veda [6], e prendendo spunto da quanto detto in [8] e [11], si dimostra la:

Proposizione 15: $\mathbb{A}_0^n \in T(i_*) \Rightarrow \exists\ \mathbb{A}_0^k, 0 < k \leq n$ e $\exists\ i_0$: $i_0 \leq i_*,\ \mathbb{A}_0^k \in \mathcal{P}T(i_0)$.

Dimostrazione: Se $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{P}T(i_*)$, allora $i_0 = i_*$ e $\mathbb{A}_0^k = \mathbb{A}_0^n$, da cui la tesi.

Se $\mathbb{A}_0^n \notin \mathcal{P}T(i_*)$, allora esiste i_- , con $i_- < i_*$, e dalla Proposizione 14 segue la tesi.

Quindi da ogni progetto che ammette almeno un T.I.R., i_*, si può sempre estrarre un sottoprogetto che risulta puro con un T.I.R. i_0 non superiore a i_*.

L'esame completo di questo problema verrà trattato alla fine del presente articolo.

Ritornando allora sull'ipotesi della troncabilità dei progetti, alla luce della precedente proposizione, al fine di mantenere un chiaro significato economico per il T.I.R., si potranno considerare economicamente significativi solo quei troncamenti che costituiscono un sottoprogetto a T.I.R. puro; tale sottoprogetto potrebbe coincidere, come casi estremi, con il progetto monoperiodale $\mathbb{A}_0^1 = (\mathrm{a}_0,\mathrm{a}_1)$ o con il progetto globale $\mathbb{A}_0^n$.

6 – PUREZZA E PROLUNGABILITA'

Vediamo, seguendo [2] e [11], sotto quali ipotesi prolungamenti ed unioni temporali di progetti puri danno luogo ancora a progetti puri.

Valgono al riguardo le seguenti:

Proposizione 16: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0)$ e $\mathbb{B} = \mathbb{A}_0^n \uplus \{\mathrm{a}_{n+1}\}$, $\mathrm{a}_{n+1} < 0 \Rightarrow \mathbb{B} \notin \mathcal{PT}$.

La dimostrazione segue immediatamente dalla Proposizione 8.

Proposizione 17: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0)$ e $\mathbb{B} = \mathbb{A}_0^n \uplus \{\mathrm{a}_{n+1}\}$, $\mathrm{a}_{n+1} > 0 \Rightarrow \mathbb{B} \in \mathcal{PT}(i_1)$, $i_1 > i_0$.

La dimostrazione segue immediatamente dalla Proposizione 14, una volta osservato che il valore i_- del progetto $\mathbb{B}$ viene a coincide con i_0.

L'aggiunta di flussi positivi in coda ad un progetto puro mantiene quindi la proprietà di purezza e comporta l'aumento sia del T.I.R. che del valore i_- .

Come dimostrato in [2], abbiamo la

Proposizione 18: Dati $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{A}})$ e $\mathbb{B}_0^m \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{B}})$, se risulta $i_0^{\mathbb{A}} > i_0^{\mathbb{B}}$, allora $\mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m \notin \mathcal{PT}$.

Dimostrazione: Sia $\mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m = \mathbb{C}_0^{n+m+1}$. Sarà:

$$\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i_0^{\mathbb{A}}) = \mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) \cdot (1+i_0^{\mathbb{A}})^{n+1} + \mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{A}}) < 0$$

in quanto $\mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) = 0$ e $\mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{A}}) < 0$, dato che $\mathbb{B}$ è puro e $i_0^{\mathbb{A}} > i_0^{\mathbb{B}}$. Sarà poi:

$$\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i_0^{\mathbb{B}}) = \mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{B}}) \cdot (1+i_0^{\mathbb{B}})^{n+1} + \mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{B}}) > 0$$

in quanto $\mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{B}}) = 0$ e $\mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{B}}) > 0$, dato che $\mathbb{A}$ è puro e $i_0^{\mathbb{B}} < i_0^{\mathbb{A}}$.

Ma allora la funzione $\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i)$, essendo continua, si annulla almeno una volta in $i_0^{\mathbb{C}}$: $i_0^{\mathbb{B}} < i_0^{\mathbb{C}} < i_0^{\mathbb{A}}$. Essendo $i_0^{\mathbb{A}} \le i_-^{\mathbb{C}}$, in quanto $\mathbb{A}$ è un sottoprogetto di $\mathbb{C}$, segue che $\mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m \notin \mathcal{PT}$.

Vale invece, sempre seguendo quanto detto in [2] e [11], la

Proposizione 19: Siano $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{A}})$ e $\mathbb{B}_0^m \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{B}})$, con $i_0^{\mathbb{A}} \le i_0^{\mathbb{B}}$, allora $\mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m$ ha almeno un T.I.R. $i_0^{\mathbb{A}\uplus\mathbb{B}}$ tale che $i_0^{\mathbb{A}} \le i_0^{\mathbb{A}\uplus\mathbb{B}} \le i_0^{\mathbb{B}}$.

Dimostrazione: Sia $\mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m = \mathbb{C}_0^{n+m+1}$ e siano $\mathbb{S}_k^{\mathbb{A}}(i)$, $\mathbb{S}_k^{\mathbb{B}}(i)$ e $\mathbb{S}_k^{\mathbb{C}}(i)$ i saldi dei progetti $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$. Da $\mathrm{a}_0 < 0$ e $\mathrm{b}_\mathrm{m} > 0$ segue che $\mathbb{C}_0^{n+m+1}$ ha almeno un T.I.R.; sia esso $i_0^{\mathbb{C}}$.

Se fosse $i_0^{\mathbb{C}} \leq i_0^{\mathbb{A}}$, essendo $\mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) = 0$ e $\mathbb{A}$ puro in $i_0^{\mathbb{A}}$, sarà anche $\mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{C}}) > 0$. Ma $\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i_0^{\mathbb{C}}) = (1+i_0^{\mathbb{C}})^{m+1} \cdot \mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{C}}) + \mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{C}}) = 0$, da cui segue $\mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{C}}) < 0$. Ma questo è assurdo in quanto $\mathbb{B}$ è puro in $i_0^{\mathbb{C}} \leq i_0^{\mathbb{A}} \leq i_0^{\mathbb{B}}$.

Se fosse $i_0^{\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{C}}$ sarà anche $\mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{C}}) < 0$ e allora, per avere $\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i_0^{\mathbb{C}}) = 0$, dovrebbe essere $\mathbb{S}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{C}}) > 0$, ma questo è assurdo in quanto $\mathbb{B}$ è puro e $i_0^{\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{C}}$.

Quindi non può che essere $i_0^{\mathbb{A}} \leq i_0^{\mathbb{C}} \leq i_0^{\mathbb{B}}$, ovvero $i_0^{\mathbb{A}} \leq i_0^{\mathbb{A}\uplus\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{B}}$.

Vale poi, vedi anche [2], la

Proposizione 20: Se $\mathbb{C}_0^{n+m+1} = \mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m$, con $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{A}})$ e $\mathbb{B}_0^m \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{B}})$, allora $i_0^{\mathbb{A}} \leq i_-^{\mathbb{C}} \leq \mathrm{Max}\left\{i_0^{\mathbb{A}}, i_-^{\mathbb{B}}\right\}$.

Dimostrazione: Essendo $\mathbb{A}$ un sottoprogetto di $\mathbb{C}$, segue che $i_0^{\mathbb{A}} \leq i_-^{\mathbb{C}}$.

Se fosse $i_-^{\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{A}}$ si ricava subito che $i_-^{\mathbb{C}} = i_0^{\mathbb{A}}$. Infatti:

$$\mathbb{S}_k^{\mathbb{C}}(i_0^{\mathbb{A}}) = \begin{cases} \mathbb{S}_k^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) & 0 \leq k \leq n \\ \mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) \cdot (1+i_0^{\mathbb{A}})^{k-n} + \mathbb{S}_{k-n-1}^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{A}}) & n+1 \leq k \leq n+m \end{cases}.$$

Ma $\mathbb{S}_k^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) \leq 0$ in quanto $\mathbb{A}$ è puro; $\mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{A}}) = 0$ mentre $\mathbb{S}_{k-n-1}^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{A}}) \leq 0$, dato che $i_-^{\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{A}}$, per $n+1 \leq k \leq n+m$.

Quindi $i_-^{\mathbb{C}} = i_0^{\mathbb{A}}$ se $i_-^{\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{A}}$.

Supponiamo invece che sia $i_0^{\mathbb{A}} \leq i_-^{\mathbb{B}}$, e vediamo allora che $i_-^{\mathbb{C}} \leq i_-^{\mathbb{B}}$. Calcoliamo

$$\mathbb{S}_k^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{B}}) = \begin{cases} \mathbb{S}_k^{\mathbb{A}}(i_-^{\mathbb{B}}) & 0 \leq k \leq n \\ \mathbb{S}_n^{\mathbb{A}}(i_-^{\mathbb{B}}) \cdot (1+i_-^{\mathbb{B}})^{k-n} + \mathbb{S}_{k-n-1}^{\mathbb{B}}(i_-^{\mathbb{B}}) & n+1 \leq k \leq n+m \end{cases}.$$

Ma $\mathbb{S}_k^{\mathbb{A}}(i_-^{\mathbb{B}}) < 0$, $0 \leq k \leq n$, in quanto $\mathbb{A}$ è puro e $i_0^{\mathbb{A}} \leq i_-^{\mathbb{B}}$; $\mathbb{S}_{k-n-1}^{\mathbb{B}}(i_-^{\mathbb{B}}) \leq 0$, per definizione di $i_-^{\mathbb{B}}$, e quindi $\mathbb{S}_k^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{B}}) \leq 0\ \forall\, k$, da cui segue $i_-^{\mathbb{C}} \leq i_-^{\mathbb{B}}$, e quindi la tesi.

Riassumendo, $i_0^{\mathbb{A}} < i_-^{\mathbb{B}} \Rightarrow i_-^{\mathbb{C}} < i_-^{\mathbb{B}}$ mentre $i_-^{\mathbb{B}} \leq i_0^{\mathbb{A}} \Rightarrow i_-^{\mathbb{C}} = i_0^{\mathbb{A}}$.

In maniera analoga vale, vedi [11], la

Proposizione 21: Se $\mathbb{C}_0^{n+m+1} = \mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m$, con $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{A}})$ e $\mathbb{B}_0^m \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{B}})$, allora $\mathrm{Min}\left\{i_+^{\mathbb{A}}, i_0^{\mathbb{B}}\right\} \leq i_+^{\mathbb{C}} \leq i_0^{\mathbb{B}}$.

Dimostrazione: Essendo $\mathbb{B}$ una coda di $\mathbb{C}$, segue che $i_+^{\mathbb{C}} \leq i_0^{\mathbb{B}}$.

Se fosse $i_0^{\mathbb{B}} \leq i_+^{\mathbb{A}}$ si ricava subito che $i_+^{\mathbb{C}} = i_0^{\mathbb{B}}$. Infatti:

$$\mathfrak{U}_k^{\mathbb{C}}(i_0^{\mathbb{B}}) = \begin{cases} \mathfrak{U}_k^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{B}}) & 0 \le k \le m \\ \mathfrak{U}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{B}}) \cdot (1+i_0^{\mathbb{B}})^{m-k} + \mathfrak{U}_{k-m-1}^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{B}}) & m+1 \le k \le m+n \end{cases}.$$

Ma $\mathfrak{U}_k^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{B}}) \ge 0$ in quanto $\mathbb{B}$ è puro; $\mathfrak{U}_m^{\mathbb{B}}(i_0^{\mathbb{B}}) = 0$ mentre $\mathfrak{U}_{k-m-1}^{\mathbb{A}}(i_0^{\mathbb{B}}) \ge 0$, dato che $i_0^{\mathbb{B}} \le i_+^{\mathbb{A}}$, per $0 \le k \le n$. Quindi $i_0^{\mathbb{B}} \le i_+^{\mathbb{A}} \Rightarrow i_+^{\mathbb{C}} = i_0^{\mathbb{B}}$.

Supponiamo invece che sia $i_+^{\mathbb{A}} \le i_0^{\mathbb{B}}$, e vediamo allora che $i_+^{\mathbb{A}} \le i_+^{\mathbb{C}}$. Calcoliamo

$$\mathfrak{U}_k^{\mathbb{C}}(i_+^{\mathbb{A}}) = \begin{cases} \mathfrak{U}_k^{\mathbb{B}}(i_+^{\mathbb{A}}) & 0 \le k \le m \\ \mathfrak{U}_m^{\mathbb{B}}(i_+^{\mathbb{A}}) \cdot (1+i_+^{\mathbb{A}})^{m-k} + \mathfrak{U}_{k-m-1}^{\mathbb{A}}(i_+^{\mathbb{A}}) & m+1 \le k \le m+n \end{cases}.$$

Ma $\mathfrak{U}_k^{\mathbb{B}}(i_+^{\mathbb{A}}) > 0$, $0 \le k \le m$, in quanto $\mathbb{B}$ è puro e $i_+^{\mathbb{A}} \le i_0^{\mathbb{B}}$; $\mathfrak{U}_{k-m-1}^{\mathbb{A}}(i_+^{\mathbb{A}}) \ge 0$, per definizione di $i_+^{\mathbb{A}}$, e quindi $\mathfrak{U}_k^{\mathbb{C}}(i_+^{\mathbb{A}}) \ge 0 \; \forall \, k$, da cui segue $i_+^{\mathbb{A}} \le i_+^{\mathbb{C}}$, e quindi la tesi.

Riassumendo, $i_+^{\mathbb{A}} < i_0^{\mathbb{B}} \Rightarrow i_+^{\mathbb{A}} < i_+^{\mathbb{C}} < i_0^{\mathbb{B}}$ mentre $i_0^{\mathbb{B}} \le i_+^{\mathbb{A}} \Rightarrow i_+^{\mathbb{C}} = i_0^{\mathbb{B}}$.

I risultati trovati portano alla

Proposizione 22: Sia $\mathbb{C}_0^{n+m+1} = \mathbb{A}_0^n \uplus \mathbb{B}_0^m$, con $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{A}})$ e $\mathbb{B}_0^m \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{B}})$; se $i_0^{\mathbb{A}} < i_0^{\mathbb{B}}$, allora $i_0^{\mathbb{A}} \le i_-^{\mathbb{C}} \le i_0^{\mathbb{C}} \le i_+^{\mathbb{C}} \le i_0^{\mathbb{B}}$, ovvero l'unione temporale di due progetti puri a T.I.R. crescenti è un progetto puro, il cui T.I.R. è compreso tra $i_0^{\mathbb{A}}$ e $i_0^{\mathbb{B}}$.

Dimostrazione: Dalla Proposizione 19 sappiamo che esiste $i_0^{\mathbb{C}}$: $i_0^{\mathbb{A}} \le i_0^{\mathbb{C}} \le i_0^{\mathbb{B}}$; dalle Proposizioni 20 e 21, se fosse $i_-^{\mathbb{B}} < i_+^{\mathbb{A}}$ segue subito $i_-^{\mathbb{C}} \le i_+^{\mathbb{C}}$, e quindi, per la Proposizione 10, segue la tesi. Supponiamo invece che sia $i_+^{\mathbb{A}} < i_-^{\mathbb{B}}$; dalle Proposizioni 20 e 21 segue che $i_0^{\mathbb{A}} \le i_-^{\mathbb{C}} \le i_-^{\mathbb{B}}$ e che $i_+^{\mathbb{A}} \le i_+^{\mathbb{C}} \le i_0^{\mathbb{B}}$. Essendo:

$$\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i) = \mathbb{S}_k^{\mathbb{C}}(i) \cdot (1+i)^{n+m+1-k} + \mathfrak{U}_{n+m-k}^{\mathbb{C}}(i) \cdot (1+i)^{n+m-k},$$

dalla definizione di $i_-^{\mathbb{C}}$ esiste almeno un k per il quale risulta: $\mathbb{S}_k^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{C}}) = 0$. Essendo $\mathbb{A}$ puro e $i_0^{\mathbb{A}} \le i_-^{\mathbb{C}}$, segue $n+1 < k < n+m$. Risulta quindi:

$\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{U}_{n+m-k}^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{C}}) \cdot (1+i_-^{\mathbb{C}})^{n+m-k}$, ma, per $n+1 < k < n+m$, è

$\mathfrak{U}_{n+m-k}^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{C}}) = \mathfrak{U}_{m-j}^{\mathbb{B}}(i_-^{\mathbb{C}})$, $0 < j < m$

ed essendo $i_-^{\mathbb{C}} \le i_-^{\mathbb{B}} \le i_+^{\mathbb{B}}$, avremo

$\mathfrak{U}_{m-j}^{\mathbb{B}}(i_-^{\mathbb{C}}) \ge 0$, e quindi $\mathbb{S}_{n+m+1}^{\mathbb{C}}(i_-^{\mathbb{C}}) \ge 0$.

Dalla Proposizione 10 segue $\mathbb{C}_0^{n+m+1} \in \mathcal{PT}(i_0^{\mathbb{C}})$, ovvero la tesi.

Un caso particolare infine, vedi [12], è rappresentato dalla seguente:

Proposizione 23: $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0)$ e $\mathbb{A}_0^k \in T(i_0)$, $(k < n) \Leftrightarrow \; i_- = i_0 = i_+$.

Possiamo quindi concludere che un progetto puro può essere prolungato, in modo da mantenere la proprietà di purezza, aggiungendo in coda flussi di cassa non negativi, o mediante l'unione di una coda costituita da un progetto che sia puro con un T.I.R. non minore di quello del progetto.

Possiamo infine dare un'enunciato conclusivo anche riguardo al problema della troncabilità di un progetto, che come detto in precedenza si basa sull'esistenza di almeno un sottoprogetto puro, con la

Proposizione 24: I soli progetti che non ammettono un sottoprogetto proprio puro sono i progetti per i quali a_n è l'unico flusso di cassa positivo.

Dimostrazione: Viste le Proposizioni 15 e 23, abbiamo anzitutto due casi: $\mathbb{A}_0^n \notin \mathcal{PT}$ oppure $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}$.

Se $\mathbb{A}_0^n \notin \mathcal{PT}$, esiste il sottoprogetto $\mathbb{A}_0^k$, quello con T.I.R. pari a i_- , e si ha che $k < n$.

Se invece risulta $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}$, potrebbe risultare sia $k < n$ che $k = n$.

Se $\mathbb{A}_0^n$ è un progetto semplice, diciamo a_k il suo primo flusso di cassa positivo; il sottoprogetto $\mathbb{A}_0^k = (a_0,0,...,0,a_k)$ è puro, in quanto semplice oppure monoperiodale, e gli eventuali ulteriori flussi $a_{k+h} \geq 0$, per la Proposizione 17, generano progetti puri a T.I.R. crescenti.

Se $\mathbb{A}_0^n$ è un progetto in senso stretto, diciamo a_k il suo primo flusso di cassa positivo; il sottoprogetto $\mathbb{A}_0^k = (a_0,0,...,a_{k-1},a_k)$ è puro, in quanto semplice, e gli eventuali ulteriori flussi $a_{k+h} \geq 0$, per la Proposizione 17, generano ancora progetti puri a T.I.R. crescenti.

Se $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0)$, con $i_- < i_0$, allora, per la Proposizione 15, $\exists\ \mathbb{A}_0^k \in \mathcal{PT}(i_-)$, con $k < n$, ovvero un sottoprogetto proprio puro a T.I.R. $i_- < i_0$.

Se $\mathbb{A}_0^n \in \mathcal{PT}(i_0)$, con $i_- = i_0$, allora, per la Proposizione 23, $\exists\ \mathbb{A}_0^k \in \mathcal{PT}(i_-)$, con $k < n$, ovvero un sottoprogetto proprio puro a T.I.R. $i_- < i_0$.

Se $i_- = -1$, ovvero se $a_k \cdot a_n \leq 0, \forall\ k : 0 < k \leq n$, allora non è possibile, per la Proposizione 8, estrarre un sottoprogetto puro proprio e l'unico sottoprogetto puro risulta il progetto stesso $\mathbb{A}_0^n$. In questo caso ricadono ovviamente i progetti monoperiodali.

BIBLIOGRAFIA

[1] – Arrow Kenneth J. - Levhari David
“Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment"
The Economic Journal
Settembre 1969, vol.79, pp.560-566.

[2] – Frascino Luigi
“Frazionabilità temporale ed unione temporale di progetti d'investimento"
Tesi di Laurea
Università degli Studi di Siena, A.A. 1995-1996.

[3] – Gronchi Sandro
“Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: una Analisi Teorica"
Collana dell'Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università degli Studi di Siena
Anno 1984.

[4] – Gronchi Sandro
“On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return"
Oxford Economic Papers
Anno 1986, vol. 38, n. 1, pp. 174-180 .

[5] – Gronchi Sandro - Lonzi Marco
“Sulla Concordanza di Alcuni Contributi in Tema di Tasso Interno di Rendimento"
Note Economiche del Monte dei Paschi di Siena
Anno 1985, n. 5/6, pp. 139-142.

[6] – Karmel P.H.
“The Marginal Efficiency of Capital"
Economic Record
Dicembre 1959, vol.35, pp.429-434.

[7] – Lonzi Marco
“Aspetti Matematici nella Ricerca di Condizioni di Unicità per il Tasso Interno di Rendimento"
Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali
Anno 1986, n.2.

[8] – Lonzi Marco
“Valore Attuale e Montante nei Progetti Puri"
Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali
Anno 1989, n.2.

[9] – Manca Paolo
“Operazioni finanziarie di Soper e operazioni di puro investimento secondo Teichroew-Robichek-Montalbano"

Atti del XII^ Convegno A.M.A.S.E.S., Palermo
Settembre 1988.

[10] – Mao James C.T.
“An Analysis of Criteria for Investment and Financing Decisions under Certainty: *a comment"*
Management Science
Novembre 1966, vol.13, n.3.

[11] – Riccarelli Samuele
“Dal Tasso Interno Puro alla Legge Finanziaria Interna Pura"
Tesi di Dottorato
Università degli Studi di Brescia, A.A. 1997-1998.

[12] – Riccarelli Samuele
“Una particolare classe di progetti d'investimento"
Atti del XXII Convegno A.M.A.S.E.S.
Genova, settembre 1998, pp.455-465.

[13] – Soper C. S.
“The Marginal Efficiency of Capital: a Further Note"
The Economic Journal
Marzo 1959, vol. 69, pp. 174-177.

[14] – Teichroew Daniel - Robicheck Alexander A. - Montalbano Michael
“Mathematical Analysis of Rates of Return Under Certainty"
Management Science
Gennaio 1965, vol. 11, pp. 395-403.

[15] – Teichroew Daniel - Robicheck Alexander A. - Montalbano Michael
“An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty"
Management Science
Novembre 1965, vol. 12, pp. 151-179.