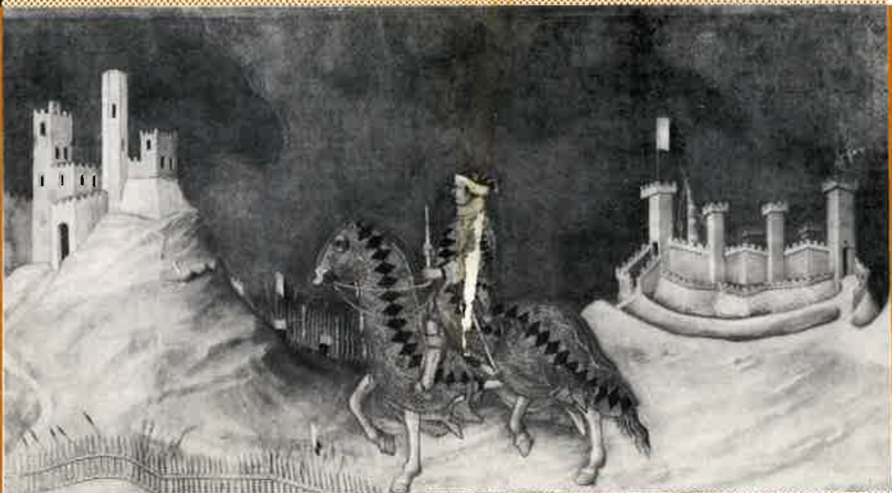
38

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie

QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

Pietro Bod

SUI PUNTI FISSI DI APPLICAZIONI ISOTONICHE



QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

Siena, maggio 1985

• Redazione: Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie - Piazza S. Francesco, 17 - 53100 Siena - tel. 0577/49059

• La Redazione ottempera agli obblighi previsti dall'Art. 1 del D.D.L. 31.8.45 n. 660

• Le richieste di copie della presente pubblicazione dovranno essere indirizzate alla Redazione

• I **Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena** vengono pubblicati dal 1981 come servizio atto a favorire la tempestiva divulgazione di ricerche scientifiche originali, siano esse in forma provvisoria o definitiva. I **Quaderni** vengono regolarmente inviati a tutti gli istituti e dipartimenti italiani, a carattere economico, nonché ad un folto indirizzario di docenti e ricercatori universitari. Vengono altresì inviati ad enti e personalità italiane ed estere. L'accesso ai Quaderni è approvato dal Comitato Scientifico, sentito il parere di un referee.

Pietro Bod

SU PUNTI FISSI DI APPLICAZIONI ISOTONICHE

Il Prof. Bod lavora presso l'Istituto Matematico dell'Accademia Ungherese delle Scienze. Questo Quaderno è stato presentato in un seminario tenuto presso l'Istituto di Economia dell'Università di Siena nel maggio 1985.

*Si consideri su un insieme $H \subset R^n$ l'applicazione:

$$f(x) = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_n(x) \end{bmatrix} ; R^n \to R^n$$

L'applicazione $f(x)$ si chiama isotonica se l'implicazione seguente è valida:

$$x^1, x^2 \in H ; \quad x^1 \geq x^2 \Rightarrow f(x^1) \geq f(x^2)$$

Mostriamo che la soluzione di varii modelli economici richiede l'identificazione di un punto fisso di applicazioni isotoniche. Seguono tre esempi:

1) Il modello statico e aperto input-output di W. Leontief. Si indichi con $x \in R^n_+$ la produzione lorda di una economia del tipo di Leontief; con $y \in R^n_+$ il consumo finale e sia data una matrice tecnologica di coefficienti delle entrate elementari che sia non-negativa. Così l'equazione seguente esprime la condizione dell'equilibrio fra produzione lorda e consumo finale:

$$x = Ax + y$$

(*) Vettori, matrici, insiemi sono indicati con lettere latine; mentre le lettere greche sono utilizzate per valori scalari.

Scrivendo invece

$$f(x) = Ax+y$$

si vede che $f(x)$ è una applicazione isotonica di R^n_+ in R^n_+ e la soluzione del modello esige la determinazione di un punto fisso dell'applicazione:

$$x = f(x)$$

2) Consideriamo ora una generalizzazione dinamica del modello sopra. Cerchiamo una traiettoria di un'economia del tipo di Leontief per intervalli discreti (annuali) $t=0, 1, 2, ..., T$.

La condizione d'equilibrio è per l'anno t:

$$x(t) = Ax(t) + i(t) + y(t)$$

dove abbiamo separato dal consumo finale originale il fabbisogno degli investimenti. Sia il vettore $K(t)$ una misura della capacità produttiva; limitando le produzioni nell'anno t

$$x(t) \leq K(t) \quad \text{per } \forall\ t$$

Sia $\Delta K(t)$ l'aumento delle capacità realizzata nell'anno t mediante gli investimenti eseguiti:

$$\Delta K(t) = K(t+1) - K(t) \quad ,$$

sia B la matrice dei coefficienti del fabbisogno di mezzi d'investimento per aumentare le capacità produttiva. Così:

$$i(t) = B\Delta K(t)$$

La capacità produttiva ha, quindi, una grandezza nell'anno: T,

$$K(T) = K_0 + \sum_{t=0}^{T-1} \Delta K(t)$$

Per non dover seguire di anno in anno l'evoluzione della capacità è opportuno introdurre un'ipotesi semplificatrice: lo sviluppo delle capacità è uniforme, nel senso che ogni settore cresce ad un tasso costante, vale a dire:

$$\mathcal{R}_j(t+1) = (1+\lambda_j)\mathcal{R}_j(t), \quad (j=1,2,...,n)\ ;\ (t=0,1,...,T-1)$$

Si ottiene così:

$$\mathcal{R}_j(T) = (1+\lambda_j)^T \mathcal{R}_j(0)$$

e

$$(1+\lambda_j) = \left[\frac{\mathcal{R}_j(T)}{\mathcal{R}_j(0)}\right]^{1/T}$$

L'aumento di capacità nell'ultimo anno è:

$$\Delta\mathcal{R}_j(T) = \lambda_j \mathcal{R}_j(T)$$

e se si sostituisce il valore di λ_j otteniamo:

$$\Delta\mathcal{R}_j(T) = \left\{\left[\frac{\mathcal{R}_j(T)}{\mathcal{R}_j(0)}\right]^{1/T} - 1\right\} \mathcal{R}_j(T)$$

Il processo d'investimento si suppone è regolato in tale modo che ogni settore non esegue investimenti se la produzione attuale fosse inferiore alle capacità esistenti. L'aumento delle capacità sarà dunque:

$$\Delta\mathcal{R}_j(T) = \left\{\left[\frac{\mathcal{R}_j(T)}{\mathcal{R}_j(0)}\right]^{1/T} - 1\right\} \xi_j(T) \quad \text{se} \quad \xi_j(T) > \mathcal{R}_j(0)$$

$$\Delta\mathcal{R}_j(T) = 0 \quad \text{se} \quad \xi_j(T) \leq \mathcal{R}_j(0)$$

Risulta, quindi, che il fabbisogno totale d'investimento

$$i(T) = B\Delta K(T)$$

è funzione isotonica di $x(T)$.

Omettendo l'indicazione dell'anno, possiamo scrivere:

$$x = Ax + B\Delta K(x) + y$$

Sia

$$f(x) = Ax + B\Delta K(x) + y.$$

Essa è anche una applicazione isotonica; e così la soluzione del modello richiede nuovamente la determinazione di un punto fisso di una applicazione isotonica:

$$x = f(x)$$

3) Come terzo esempio può servire la generalizzazione non-lineare del modello statico, aperto input-output. Si assuma che le entrate elementari

sono funzioni multivariabili che dipendono da tutti i livelli della produzione. vale a dire che la matrice delle entrate elementari ha la forma seguente:

$$X(x) = \begin{bmatrix} X_{11}(x) & \cdots & X_{1n}(x) \\ \cdots & X_{ij}(x) & \cdots \\ X_{n1}(x) & \cdots & X_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

dove $X_{ij}(x)$ denota il volume del bene prodotto dal settore i che è utilizzato nel settore j per effettuare la produzione lorda x.

Facciamo le supposizioni seguenti, plausibili, concernenti le entrate elementari:

- le funzioni $X_{ij}(x)$; $\forall i,j$ sono definite in R^n_+ e sono continue nell'interno di R^n_+.
- $X_{ij}(0) = 0$; $\forall i,j$.
- $X_{ij}(x) \geq 0$; $\forall i,j$ se $|x| > 0$.

Definiamo la funzione composta di entrata dell'economia globale:

$$G(x) = \begin{bmatrix} G_1(x) \\ \vdots \\ G_n(x) \end{bmatrix} \in R^n$$

dove $G(x) = X(x) \cdot e$ mentre il vettore e è il vettore unità di dimensione

n.

E' ragionevole presumere che G(x) sia isotonica. Tale ipotesi implica che una produzione lorda allargata non esige sicuramente meno entrate che una produzione più piccola.

Se introduciamo:

$$f(x) = G(x) + y$$

si vede che f(x) è una applicazione isotonica e la soluzione del modello esige la determinazione di un suo punto fisso

$$x = f(x) \quad .$$

Poichè il modello input-output è uno dei modelli economici più importanti: molti autori si sono occupati della sua generalizzazione. La maggioranza degli autori ha seguito un approccio costruttivo; elaborando algoritmi che convergano ad un punto fisso (7, 8, 9, 11, 13, 14). L'isotonicità delle funzioni viene naturalmente postulata e sfruttata nelle dimostrazioni. Però Hakan Persson fu il primo nel 1983 in Göteborg a partire nelle sue analisi intenzionalmente dalle applicazioni isotoniche (12).

Qui si seguirà un approccio che si basa sulla teoria della programmazione matematica e mette bene in evidenza la struttura interna del problema. Il nostro approccio ha una storia relativamente lunga, che vogliamo qui brevemente ricapitolare.

Nel 1963 G. Wintgen, a Berlino, ha osservato che nel problema seguente di programmazione lineare:

$$x - Ax - s = y$$

$$x, s \geq 0$$

$$c^T x \rightarrow \min!$$

(il modello è un modello input-output lineare esteso con un vettore indicante il livello delle scorte) la soluzione si presenta sempre nello stesso punto, qualsiasi fosse il vettore specifico non-negativo, dei costi (c^T) applicato nella funzione oggetto da minimizzare.

Sulla base di questa costatazione, Wintgen introdusse nel 1964 la nozione di 'indifferenza' nella teoria della programmazione matematica (1, 15).

Sia dato un insieme non vuoto delle soluzioni ammissibili M ed una classe di funzioni oggetto $\mathscr{E}$.

Si consideri il problema seguente:

Determinare $\bar{x} \in M \subset R^n$

P. $\qquad z(\bar{x}) = \min z(x) \quad \text{per } \forall\ x \in M;\ z \in \mathscr{E}$

Il problema P. è detto indifferente relativo alla famiglia $\mathscr{E}$ se esiste $\hat{x}$ tale che

$$z(\hat{x}) \leq (\geq) z(x) \quad \text{per } \forall\ x \in M;\ \forall\ z \in \mathscr{E}$$

Wintgen ha formulato delle condizioni sufficienti per la situazione seguente: sia M non vuoto e compatto; sia

$$Z(x) = \begin{bmatrix} z_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_n(x) \end{bmatrix}$$

una funzione vettoriale avendo componenti almeno semicontinui. Consideriamo l'insieme delle combinazioni lineari non-negative delle funzioni come la famiglia:

$$\mathscr{E} = \left\{ z(x) \mid z(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i(x) \ ;\ \lambda_i \geq 0 \right\}$$

Il problema così definito è detto indifferente relativo a $\mathscr{E}$ se la proiezione dell'insieme $\dot{M}$ mediante l'applicazione Z, $\bar{M} = Z(M)$: è chiuso per una operazione vettoriale specifica.

Definiamo le operazioni vettoriali seguenti:

$$x^1, x^2 \in R^n \quad x^0 = x^1 \cap x^2 \qquad \text{dove } \xi_i^0 = \min(\xi_i^1, \xi_i^2)$$

$$x^0 = x^1 \cup x^2 \qquad \text{dove } \xi_i^0 = \max(\xi_i^1, \xi_i^2)$$

Se l'insieme $\bar{M}$ ha la proprietà che

$$x^1, x^2 \in M \Rightarrow Z(x^1) \cap Z(x^2) \in Z(M) = \bar{M}$$

il problema di minimizzazione P è indifferente.

Qualora,

$$x^1, x^2 \in M \Rightarrow Z(x^1) \cup Z(x^2) \in Z(M) = \bar{M} :$$

il problema P di massimizzazione è indifferente.

Dalle condizioni di Wintgen segue:

Lemma: Sia l'applicazione

$$Z(x) = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}$$

che significa ogni punto viene proiettato in sè: $\bar{M} = M$. La famiglia $\mathscr{E}$ è la famiglia delle forme lineari non-negative. Se risulta che l'insieme M sia chiuso per l'operazione $\cap$ tutte le forme lineari non-negative prendono il loro valore minimo nello stesso punto $\hat{x}$ di M. Cioè l'insieme M possiede un punto più piccolo, poichè:

$$\hat{x} \leq x, \ \forall x \in M$$

Se l'insieme M possiede un punto più piccolo, allora questo punto è il punto minimo comune non soltanto delle funzioni lineari non-negative, ma anche di tutte le funzioni isotoniche. Sia $\varnothing(x)$ una funzione isotonica:

$$\varnothing(\hat{x}) \leq \varnothing(x) \ \forall x \in M$$

La nozione di indifferenza ha richiamato l'attenzione sul problema di esistenza di insiemi avendo un elemento più piccolo.

E' possibile caratterizzare con condizioni sufficienti e necessarie una classe di poliedri convessi avendo un elemento più piccolo, come:

$$M = \left\{x \in R^n \mid Ax = b;\ x \geq 0\right\}$$

vale a dire poliedri che sono sezioni di un numero finito di iperpiani con ortante non negativo (1, 2).

Cottle e Veinott Jr. hanno generalizzato questi risultati caratterizzando poliedri convessi:

$$M = \left\{x \in R^n \mid Ax \geq b\right\}$$

avendo un elemento più piccolo. Questi poliedri sono sezioni di un numero finito di mezzi spazi chiusi (6).

Infine è anche possibile caratterizzare insiemi convessi con questa proprietà, ottenuti come un numero finito di insiemi di livelli da funzioni convesse (3):

$$M = \left\{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0;\quad i = 1, 2, \ldots, N\right\}$$

Gli insiemi, avendo un elemento più piccolo, posseggono un ruolo speciale nel problema di complementarità lineare. Mangasarian indicò una famiglia di matrici, per le quali il problema di complementarità è equivalente ad un problema di programmazione lineare (10). Cottle e Pang hanno mostrato

che la ragione di tale risultato riguarda l'esistenza di un elemento più piccolo nell'insieme delle soluzioni ammissibili (5).

Si consideri nuovamente il problema fondamentale

Sia f(x) continua ed isotonica:

$$x^1 \geq x^2 \Rightarrow f(x^1) \geq f(x^2)$$

Definiamo l'insieme seguente:

$$M = \left\{x \in R^n \mid x \geq f(x)\right\} = \left\{x \in R^n \mid x - f(x) \geq 0\right\}$$

Teorema 1. Sia $M \neq \emptyset$ e $|M| > 1$. M è chiuso per l'operazione vettoriale: $\cap$

Dimostrazione. Siano $x^1, x^2 \in M$ e $x^0 = x^1 \cap x^2$

E' ovvio che $x^0 \leq x^1$; $x^0 \leq x^2$

Mostriamo che $x^0 \in M$

Se per l'indice i, $\xi_i^0 = \xi_i^1 \leq \xi_i^2$

$$\xi_i^0 - \phi_i(x^0) = \xi_i^1 - \phi_i(x^0) \geq \xi_i^1 - \phi_i(x^1) \geq 0$$

Se per l'indice i, $\xi_i^0 = \xi_i^2 \leq \xi_i^1$

$$\xi_i^0 - \varnothing_i\ (x^0) = \xi_i^2 \varnothing_i(x^0) \geq \xi_i^2 - \varnothing_i(x^2) \geq 0\ .$$

Teorema 2. L'insieme M possiede un elemento più piccolo se è non vuoto e limitato.

Dimostrazione. M è un insieme chiuso in R^n; se è anche limitato, le condizioni del Lemma di Wintgen sono soddisfatte, cioè:

$$\exists \hat{x} \in M \quad \text{così che} \quad \hat{x} \leq x \quad ; \quad \forall\ x \in M \quad .$$

Teorema 3. $\hat{x}$ l'elemento più piccolo è una soluzione complementare; vale a dire che

$$\hat{x}^T \left| \hat{x} - f(\hat{x}) \right| = 0$$

Dimostrazione. Sia l'asserzione falsa: allora esiste un indice i tale che $\hat{\xi}_i \neq 0$ e $\hat{\xi}_i - \varnothing_i(\hat{x}) > 0$.

Sia $\bar{x} = \hat{x} - \delta e_i$, $\delta > 0$. E' chiaro che $\bar{x} < \hat{x}$ e $f(\bar{x}) \geq f(\hat{x})$.

Mostriamo che se il valore di δ è sufficientemente piccolo, $\bar{x} \in M$ e così $\hat{x}$ non può essere l'elemento più piccolo di M, ciò conduce ad una contraddizione.

La condizione con indice i:

$$\bar{\xi}_i - \varnothing_i(\bar{x}) = \hat{\xi}_i - \delta - \varnothing_i(\hat{x} - \delta e_i) =$$

$$= \hat{\xi}_i - \varnothing_i\ (\hat{x}) + \varnothing_i\ (\hat{x}) - \delta - \varnothing_i(\hat{x} - \delta e_i) =$$

$$= \underbrace{\hat{\xi}_i - \varnothing_i(\hat{x})}_{>0} - \Big| \underbrace{\delta + [\varnothing_i(\hat{x} - \delta e_i) - \varnothing_i(\hat{x})]}_{\leq \varepsilon} \Big| \geq$$

$$\geq 0$$

Il primo membro è positivo, mentre per via della continuità di $\varnothing_i(x)$ il secondo può diventare arbitrariamente piccolo se si sceglie δ sufficientemente piccolo.

Per le condizioni con indici $j \neq i$:

$$\bar{\xi}_j - \varnothing_j(\bar{x}) = \hat{\xi}_j - \varnothing_j(\bar{x}) \geq \hat{\xi}_j - \varnothing_j(\hat{x}) \geq 0$$

$\bar{x}$ soddisfa tutti i vincoli e dovrebbe appartenere all'insieme M, da cui si evidenzia la contraddizione.

Teorema 4. L'elemento più piccolo dell'insieme non vuoto e compatto M è un punto fisso dell'applicazione f(x).

Dimostrazione. Se tutti i componenti del vettore sono positivi, segue dalla complementarità che $\hat{\xi}_i - \varnothing_i(\hat{x}) = 0$ e così $\hat{x} = f(\hat{x})$.

Se certi elementi del vettore $\hat{x}$, per esempio $\hat{\xi}_j = 0$ e nello stesso tempo $\phi_j(\hat{x})=0$ non c'è difficoltà per: $\hat{\xi}_j = \phi_j(\hat{x})$.

Si consideri perciò:

$$\hat{\xi}_j = 0; \quad \hat{\xi}_j - \phi_j(\hat{x}) > 0$$

ma questo caso non può verificarsi. Infatti,

$$0<\hat{\xi}_j - \phi_j(\hat{x}) = 0 - \phi_j(\hat{x})$$

e, quindi:

$$\phi_j(\hat{x}) < 0$$

Sia $\phi_j(\hat{x}) < - \delta < 0$, consideriamo il vettore $\bar{x}=\hat{x}-\delta e_j$. Per il vincolo j si avrebbe:

$$\bar{\xi}_j - \phi_j(\bar{x}) = -\delta - \phi_j(\bar{x}) \geq -\delta - \phi_j(\hat{x}) > 0$$

Per i vincoli $j \neq i$ si verificherebbe:

$$\bar{\xi}_i - \phi_i(\bar{x}) \geq \hat{\xi}_i - \phi_i(\hat{x}) \geq 0 .$$

Così $\bar{x} \in M$ è una contraddizione.

In modelli economici si richiedono soprattutto delle applicazioni che proiettano R^n_+ in R^n_+.

In questo caso si consideri l'insieme:

$$M_+ = \left\{x \in R^n_+ \mid x-f(x) \geq 0\right\}$$

Il Teorema 2 può essere riformulato in modo leggermente diverso.

Teorema 2'. M_+ possiede un elemento più piccolo se è non vuoto (Non deve esser necessariamente compatto).

L'elemento più piccolo è naturalmente una soluzione complementare non-negativa ed è allo stesso tempo un punto fisso dell'applicazione $f(x)$.

Ritornando al modello non-lineare dove $f(x) = G(x) + y$ e $y > 0$.

Un'economia si chiama "funzionabile" se può produrre del sovrapiù, vale a dire un consumo finale positivo è ottenibile. In questo caso $\exists \bar{x} \geq 0$ tale che $\bar{x} \geq G(\bar{x})$.

Nel modello lineare di input-output la funzionabilità è una condizione necessaria e sufficiente per realizzare un consumo finale arbitrario. Nel caso non-lineare la funzionabilità è soltanto una condizione necessaria, perciò è opportuno introdurre:

Definizione 1. Un consumo finale $\bar{y} > 0$ in un'economia funzionabile è detto "raggiungibile" se

$$\mathscr{L}\bar{y} = \left\{x \in R^n_+ \mid x \geq G(x) + \bar{y}\right\} \equiv \left\{x \in R^n_+ \mid x \geq f(x)\right\} \neq \emptyset$$

$\mathscr{L}\bar{y}$ è un insieme M_+ e possiede un elemento più piccolo $\bar{x}$. Infatti:

Teorema 5. L'elemento più piccolo di $\mathscr{L}\bar{y}$ è positivo.

Dimostrazione. Si consideri soltanto il caso in cui $G(o) = 0$ e perciò $f(o) = G(o) + \bar{y} > 0$.

$\bar{x}$ non può avere componenti negativi, per altro non sarebbe ammissibile.

Definizione 2. Una funzione $\phi(x)$ può essere considerata come funzione di spesa della riproduzione sociale se

i) $\phi(o) = 0$

ii) $\phi(x) > 0$ se $| x | > 0$

iii) $\phi(x)$ è isotonica.

Possiamo adesso caratterizzare il sistema non-lineare, aperto e statico input-output.

Teorema 6. In una economia funzionabile ogni consumo finale raggiungibile: $\bar{y}$ può essere realizzato mediante una produzione lorda che esige spese minime.

Dimostrazione. Poichè

$$\mathscr{L}\bar{y} = \left\{x \in R^n_+ \mid x \geq G(x) + \bar{y}\right\} \neq \emptyset \quad \hat{x} \leq x, \quad \forall x \in \mathscr{L}\bar{y}.$$

Il punto più piccolo essendo un punto fisso realizza il consumo finale. Se esistono più punti fissi il valore minimo della funzione di spese deve presentarsi nel punto più piccolo di ogni funzione isotonica di spesa.

Ulteriori elementi del modello non-lineare input-output sono indicati altrove (4).

Bibliografia

(1) Bod P.: Il concetto di "Indifferenza" nella programmazione matematica. *Pubblicazione Omaggio dell'Istituto di Calcolo delle Probabilità dell'Università di Roma*, n. 21, 1966.

(2) Bod P.: Uber indifferente Optimierungsaufbagen. / Eine Ubersicht / Nel: *Methods of Operations Research* XVI. teil 1. 42-50. verlag Anton Hain. 1972.

(3) Bod P.: On closed sets having a least element. *Optimization and Operations Research: Oberwolfach 1975*, Lecture Notes in econom. Math. Systems. Vol. 117. Springer Verlag, Berlino 1976.

(4) Bod P.: Uber allgemeine Input-Output Beziehungen: *Methods Of Operations Research*. 46. 211-22. Verlagsgruppe Athenäum, Hain, Hanstein, 1983.

(5) Cottle R.W., Pang J.S. Jr.: On solving linear complementarity problems as linear programs. *Mathematical Programming Study*, 7, 88-107.

(6) Cottle R.W., Veinott A.F. Jr.: Polyhedral sets having a least element. *Mathematical Programming*, vol. 3, n. 2, 1972, 238-249.

(7) Evans, W.D.: Input-output computations. In Ed. Barna T.: *The Structural Interdependence of the Economy*, John Wiley and Sons. 1954.

(8) Lahiri S.: Input-Output analysis with scale-dependent coefficients. *Econometrica* 44, 1976, 947-962.

(9) Lahiri S., Pyatt G.: On the solution of scale-dependent Input-Output models. *Econometrica*, 49, 1980, 1827-1831.

(10) Mangasarian O.L.: Characterization of linear complementarity problems as linear programs. *Mathematical Programming Study* 7, 74-87.

(11) Nataf A.: Systèmes Economiques de production à rendement croissant. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, Vol. IX, fasc. 2, 1960, 161-170.

(12) Persson H.: Theory and applications of multisectoral growth models. *Economiska Studier Utgivna Av Nationalekonomiska Institutione Vid*

Göteborgs Universitet. 14, 1983.

(13) Sandberg I.W.: A non-linear Input-Output model of multisectoral Economy. *Econometrica*, 41, 1973, 1167-1182.

(14) Tamir A.: Minimality and complementarity properties associated with Z-functions and M-functions. *Mathematical Programming* 7, 1974, 17-31.

(15) Wintgen G.: Indifferente Optimierungsprobleme. *MKÖ Tagung Konferenzprotokoll*, 1964, Teil II, 3-6.

Elenco dei Quaderni pubblicati

n. 1 (febbraio 1979)
MASSIMO DI MATTEO
Alcune considerazioni sui concetti di lavoro produttivo e improduttivo in Marx.

n. 2 (marzo 1979)
MARIA L.RUIZ
Mercati oligopolistici e scambi internazionali di manufatti. Alcune ipotesi e un'applicazione all'Italia

n. 3 (maggio 1979)
DOMENICO MARIO NUTI
Le contraddizioni delle economie socialiste: una interpretazione marxista

n. 4 (giugno 1979)
ALESSANDRO VERCELLI
Equilibrio e dinamica del sistema economico-semantica dei linguaggi formalizzati e modello keynesiano

n. 5 (settembre 1979)
A. RONCAGLIA - M. TONVERONACHI
Monetaristi e neokeynesiani: due scuole o una?

n. 6 (dicembre 1979)
NERI SALVADORI
Mutamento dei metodi di produzione e produzione congiunta

n. 7 (gennaio 1980)
GIUSEPPE DELLA TORRE
La struttura del sistema finanziario italiano: considerazioni in margine ad un'indagine sull'evoluzione quantitativa nel dopoguerra (1948-1978)

n. 8 (gennaio 1980)
AGOSTINO D'ERCOLE
Ruolo della moneta ed impostazione antiquantitativa in Marx: una nota

n. 9 (novembre 1980)
GIULIO CIFARELLI
The natural rate of unemployment with rational expectations hypothesis. Some problems of estimation

n. 10 (dicembre 1980)
SILVANO VICARELLI
Note su ammortamenti, rimpiazzi e tasso di crescita

n. 10 bis (aprile 1981)
LIONELLO F. PUNZO
Does the standard system exist?

n. 11 (marzo 1982)
SANDRO GRONCHI
A meaningful sufficient condition for the uniqueness of the internal rate of return

n. 12 (giugno 1982)
FABIO PETRI
Some implications of money creation in a growing economy

n. 13 (settembre 1982)
RUGGERO PALADINI
Da Cournot all'oligopolio: aspetti dei processi concorrenziali

n. 14 (ottobre 1982)
SANDRO GRONCHI
A Generalized internal rate of return depending on the cost of capital

n. 15 (novembre 1982)
FABIO PETRI
The Patinkin controversy revisited

n. 16 (dicembre 1982)
MARINELLA TERRASI BALESTRIERI
La dinamica della localizzazione industriale: aspetti teorici e analisi empirica

n. 17 (gennaio 1983)
FABIO PETRI
The connection between Say's law and the theory of the rate of interest in Ricardo

n. 18 (gennaio 1983)
GIULIO CIFARELLI
Inflation and output in Italy: a rational expectations interpretation

n. 19 (gennaio 1983)
MASSIMO DI MATTEO
Monetary conditions in a classical growth cycle

n. 20 (marzo 1983)
MASSIMO DI MATTEO - MARIA L. RUIZ
Effetti dell'interdipendenza tra paesi produttori di petrolio e paesi industrializzati: un'analisi macrodinamica

n. 21 (marzo 1983)
ANTONIO CRISTOFARO
La base imponibile dell'IRPEF: un'analisi empirica (marzo 1983)

n. 22 (gennaio 1984)
FLAVIO CASPRINI
L'efficienza del mercato dei cambi. Analisi teorica e verifica empirica

n. 23 (febbraio 1984)
PIETRO PUCCINELLI
Imprese e mercato nelle economie socialiste: due approcci alternativi

n. 24 (febbraio 1984)
BRUNO MICONI
Potere prezzi e distribuzione in economie mercantili caratterizzate da diverse relazioni sociali

n. 25 (aprile 1984)
SANDRO GRONCHI
On investment criteria based on the internal rate of return

n. 26 (maggio 1984)
SANDRO GRONCHI
On Karmel's criterion for optimal truncation

n. 27 (giugno 1984)
SANDRO GRONCHI
On truncation "theorems"

n. 28 (ottobre 1984)
LIONELLO F. PUNZO
La matematica di Sraffa

n. 29 (dicembre 1984)
ANTONELLA STIRATI
Women's work in economic development process

n. 30 (gennaio 1985)
GIULIO CIFARELLI
The natural rate of unemployment and rational expectation hypotheses: some empirical tests.

n. 31 (gennaio 1985)
SIMONETTA BOTARELLI
Alcuni aspetti della concentrazione dei redditi nel Comune di Siena

n.32 (febbraio 1985)
FOSCO GIOVANNONI
Alcune considerazioni metodologiche sulla riforma di un sistema tributario

n. 33 (febbraio 1985)
SIMONETTA BOTARELLI
Ineguaglianza dei redditi personali a livello comunale

n. 34 (marzo 1985)
IAN STEEDMAN
Produced inputs and tax incidence theory

n. 35 (aprile 1985)
RICHARD GOODWIN
Prelude to a reconstruction of economic theory. A critique of Sraffa

n. 36 (aprile 1985)
MICHIO MORISHIMA
Classical, neoclassical and keynesian in the Leontief world

n. 37 (aprile 1985)
SECONDO TARDITI
Analisi delle politiche settoriali: prezzi e redditi nel settore agroalimentare