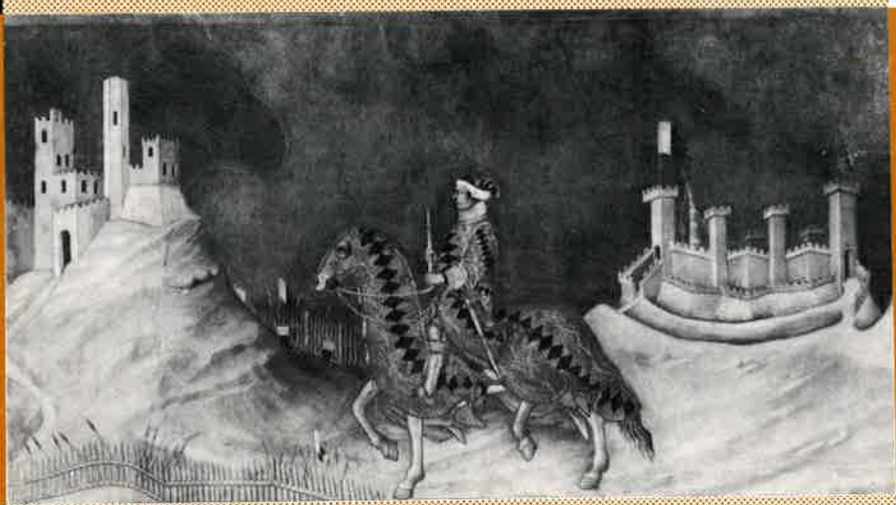
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie

39

QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

Stefano Vannucci

SCHEMI DI GIOCO SIMMETRICI E STABILI E TEOREMI DI POSSIBILITA' PER SCELTE COLLETTIVE



QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

Siena, giugno 1985

• Redazione: Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie - Piazza S. Francesco, 17 - 53100 Siena - tel. 0577/49059

• La Redazione ottempera agli obblighi previsti dall'Art. 1 del D.D.L. 31.8.45 n. 660

• Le richieste di copie della presente pubblicazione dovranno essere indirizzate alla Redazione.

• I **Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena** vengono pubblicati dal 1981 come servizio atto a favorire la tempestiva divulgazione di ricerche scientifiche originali, siano esse in forma provvisoria o definitiva. I **Quaderni** vengono regolarmente inviati a tutti gli istituti e dipartimenti italiani, a carattere economico, nonché ad un folto indirizzario di docenti e ricercatori universitari. Vengono altresì inviati ad enti e personalità italiane ed estere. L'accesso ai **Quaderni** è approvato dal Comitato Scientifico, sentito il parere di un referee.

Stefano Vannucci

SCHEMI DI GIOCO SIMMETRICI E STABILI E TEOREMI DI POSSIBILITA' PER SCELTE COLLETTIVE

Il Dott. Stefano Vannucci è ricercatore presso l'Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università di Siena.

1. *Introduzione*

Una funzione di scelta sociale associa ad ogni profilo di caratteristiche individuali rilevanti -in genere, preferenze ed, eventualmente, dotazioni iniziali- una alternativa, l'alternativa 'ottima' per quel profilo. Una funzione di scelta sociale incorpora criteri normativi appropriati per un processo decisionale collettivo. Pertanto le si impongono di solito il requisito di efficienza paretiana e qualche forma di simmetria nel trattamento degli agenti e delle alternative.

Uno schema di gioco -in forma normale- specifica l'insieme delle strategie pure a disposizione di ogni agente ed associa ad ogni combinazione di strategie pure -una per agente- un risultato, in uno spazio di alternative opportunamente specificato. Uno schema di gioco ed un profilo determinano in modo naturale un gioco. Fissato un opportuno concetto di equilibrio, uno schema di gioco si dice stabile se, per ogni profilo ammissibile, il gioco corrispondente ammette qualche equilibrio. Si dice che -rispetto ad un dato concetto di equilibrio- uno schema di gioco stabile realizza una certa funzione di scelta sociale se, per ogni profilo, esiste una multistrategia di equilibrio che seleziona la stessa alternativa della funzione di scelta sociale.

In anni recenti si è sviluppata una letteratura che mostra l'esistenza di schemi di gioco i quali, di solito grazie ad una opportuna distribuzione di poteri di veto, realizzano funzioni di scelta sociale dotate di proprietà eticamente appropriate di simmetria ed efficienza (cfr. ad es. Peleg (1978), Mueller (1978), Dutta e Pattanaik (1978), Maskin (1979), Moulin (1979, 1980, 1981a, 1981b, 1982, 1983), Moulin e Peleg (1982), Barbera e Dutta (1982), Dutta (1983), Armbruster e Böge (1983). Questo filone di risultati di possibilità contrasta con la situazione finora prevalente in quest'area di ricerca. E' ben noto infatti che la teoria delle scelte collettive si distingue per una notevole serie di teoremi limitativi.

I due teoremi di 'impossibilità' fondamentali sono il celebre teorema di Arrow ("se le alternative sono almeno tre, non esiste una funzione del benessere sociale definita per 'tutti' i profili, efficiente, non dittatoriale e che soddisfi la condizione c.d. di 'indipendenza dalle alternative irrilevanti' "); e il più recente (1973) teorema di Gibbard e Satterthwaite ("se le alternative sono almeno tre, non esiste una funzione di scelta sociale non dittatoriale e realizzabile mediante uno schema di gioco stabile per equilibri dominanti"). E' stato sostenuto -cfr. Jacobs (1979)- che alcuni dei risultati positivi a cui si è alluso sopra costituiscono la via d'uscita dal paradosso legato al teorema di Arrow. Peleg (1978), da parte sua, suggerisce di interpretare i propri risultati come un aggiramento dell'impossibilità di Gibbard--Satterthwaite.

Questo ottimismo sembra pienamente giustificato. Tuttavia, una valutazione precisa della portata di tali teoremi di possibilità richiede un esa-

me sistematico dei criteri lasciati cadere, e di quelli conservati e magari rafforzati, rispetto allo schema originario. Si tratta di una analisi non del tutto banale, poiché i contesti entro cui sono stati ottenuti i vari risultati di 'possibilità' e di 'impossibilità' sono generalmente abbastanza diversi, da un punto di vista formale.

Questo lavoro si propone due obiettivi:

i) formulare in modo chiaro la struttura logica comune di questa importante famiglia di teoremi di possibilità. A questo scopo, si è preferito cominciare dalle proprietà di simmetria (e stabilità) di uno schema di gioco, piuttosto che delle funzioni di scelta sociale che esso eventualmente realizza. Successivamente si analizzano condizioni generali sotto le quali tali proprietà di simmetria si 'trasmettono' alle corrispondenti funzioni di scelta sociale attraverso le selezioni di equilibrio. I vantaggi di questo approccio (cfr. Packel, Saari (1982) per un'impostazione simile) consistono in una leggera generalizzazione nella formulazione del problema che sembra facilitare l'interpretazione complessiva dei teoremi di 'possibilità' ottenuti.

ii) rispondere brevemente al quesito di cui sopra, su quali sono i criteri originari incorporati in questi teoremi di 'possibilità', e quali quelli lasciati cadere. La risposta può essere riassunta come segue, in termini intuitivi: il requisito di efficienza viene conservato, i requisiti di simmetria vengono essenzialmente rafforzati. Il criterio fondamentale che viene essenzialmente indebolito è quello della 'perfetta decentralizzabilità', in un senso che verrà opportunamente precisato.

2. *Definizioni e preliminari*

$N = \{ 1, \ldots, n \}$ è un insieme finito, detto l'insieme degli agenti. L'insieme delle parti di N, $\mathcal{P}(N)$, si dice insieme delle coalizioni. X è un insieme, detto insieme di tutte le alternative possibili. Con $\mathcal{R}_Y$ indichiamo l'insieme dei preordini completi -relazioni binarie transitive e complete- su $Y \subseteq X$ (se il contesto esclude ambiguità scriveremo anche $\mathcal{R}$). $\mathcal{P}_Y$ indica l'insieme degli ordini lineari -preordini completi antisimmetrici- su $Y \subseteq X$. Nel seguito assumeremo che per ogni agente i e per ogni $Y \subseteq X$, $\mathcal{P}_i = \mathcal{P}_Y$ rappresenti l'insieme delle preferenze ammissibili su Y (indichiamo con P un generico elemento di $\mathcal{P}_Y$). Un profilo (lineare) è una funzione $P^n : N \longrightarrow \mathcal{P}_Y$, con proiezioni P_i, i = 1, ..., n. Con $\mathcal{R}_Y^N$, $\mathcal{P}_Y^N$ indichiamo l'insieme dei profili, rispettivamente dei profili lineari, su $Y \subseteq X$. Sia $A \subseteq X$, A finito. Una funzione di scelta sociale (finita) -d'ora in poi anche fss- su A è una funzione $f : \mathcal{D} \longrightarrow A$, con $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}_A^N$. Se $\mathcal{D} = \mathcal{P}_A^N$ la fss f si dice debolmente ristretta. Nel seguito ci limitiamo appunto a fss debolmente ristrette, sebbene molti risultati si estendano al caso di profili non lineari.

Uno schema di gioco -d'ora in poi anche sg- tra n agenti è una n+2-pla $G = (S_1, \ldots, S_h; \varphi ; g)$ con S_i insieme delle strategie pure di i (i = 1, ..., n),

$S = \prod_{i=1}^{n} S_i$; è una funzione $\varphi : S \longrightarrow \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$; g, detta funzione-risultato di G, è una funzione $g : S \longrightarrow X$ t.c. per ogni $s \in S$, posto $A = \varphi(s)$, è $A \subseteq g[S]$.

Se φ è una funzione costante con valore costante A, G si dice uno sg su A, e si scrive $G = (S_1, \ldots, S_n; A; g)$. Se S è finito e i valori di φ sono tutti insiemi finiti, G si dice finito. Si noti che una fss su A può essere vista come un esempio particolare di funzione-risultato a cui corrisponde lo sg $F = (\mathcal{D}; A ; f)$. Diremo diretto uno sg la cui funzione-risultato è una fss. Gli elementi $s = (s_1, \ldots, s_n)$ dell'insieme S si dicono multistrategie (pure) con proiezioni s_i, i = 1, ..., n, multiproiezioni $s_C \in S_C = \prod_{i \in C} S_i$ (ove $C \subseteq N$ è una qualsiasi coalizione), e rispettive co-proiezioni $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in S_{-i}$, $s_{N \setminus C} \in S_{N \setminus C}$.

Uno schema di gioco G su A associa ad ogni profilo $R^n \in \mathcal{R}_A^N$ un gioco ordinale in forma normale $(G, R^n) := (S_1, \ldots, S_n; A; g; R^n)$ (si noti che, per comodità, abbiamo definito sg oggetti che più propriamente dovremmo denominare sg in forma normale).

Definiamo qui di seguito alcuni concetti di equilibrio formulati nell'ambito della teoria dei giochi e applicati diffusamente nella teoria delle scelte collettive. Sia $G = (S_1, \ldots, S_n; A; g)$, uno sg su A, e (G, R^n) il corrispondente gioco ordinale per $R^n \in \mathcal{R}_A^N$.

Una multistrategia $s = (s_1, \ldots, s_n) \in S$ è un equilibrio dominante (ED) per (G, R^n) sse per ogni $i \in N$, per ogni $s' \in S$, $(g(s_i, s'_{-i}), g(s')) \in R_i$.

Una multistrategia s è un equilibrio dominante forte (EDF) per (G, R^n) sse per ogni coalizione $C \subseteq N$, per ogni $s'_C \in S_C$, e per ogni $s'_{N \setminus C}$ e $s_{N \setminus C}$, esiste $i \in C$ t.c. $(g(s_C, s'_{N \setminus C}), g(s')) \in R_i$.

Una multistrategia s è un equilibrio di Nash (EN) per (G, R^n) sse per ogni $i \in N$, e per ogni $s'_i \in S_i$, $(g(s), g(s'_i, s_{-i})) \in R_i$. Una multistrategia s è un equilibrio di Nash forte (ENF) per (G, R^n) sse per ogni coalizione $C \subseteq N$ e per ogni $s'_C \in S_C$, esiste $i \in C$ t.c.

$$(g(s), g(s'_C, s_{N \setminus C})) \in R_i .$$

Una C-minaccia a $s \in S$ in (G, R^n) è una coppia (C, s'), con

$$C \subseteq N,\ s' \in S, \text{ t.c. } s'_C \neq s_C,\ s'_{N \setminus C} = s_{N \setminus C}, \text{ e } (g(s'), g(s)) \in \bigcap_{i \in C} P_i$$

(ove $R^n = (R_1, \dots, R_n)$, P_i = componente asimmetrica di R_i). Se (C, s') è una C-minaccia a s in (G, R^n), una D-controminaccia a (C, s') è una coppia (D, s''), con $D \subseteq N \setminus C$, $s'' \in S$, t.c. esiste $i \in C$ per cui $(g(s), g(s''_D, s'_{N \setminus D})) \in P_i$.

Una multistrategia $s \in S$ si dice un equilibrio di Nash generalizzato (ENG) per (G, R^n) sse ogni $\{i\}$ -minaccia a s in (G, R^n) (con $i = 1, \dots, n$) ammette una $\{j\}$-controminaccia (con $j \in N \setminus \{i\}$).

Una multistrategia s è un equilibrio di Nash generalizzato forte (ENGF) per (G, R^n) sse ogni C-minaccia a s in (G, R^n) (con $C \subseteq N$) ammette una D-controminaccia (per qualche $D \subseteq N$) (cfr. Pattanaik (1978) cap. 6).

Per ogni B, $\{b\} \subseteq A$ diciamo che B domina b in (G, R^n) mediante $C \subseteq$

$\subseteq N$ -e scriviamo $(B,b) \in Dom((G, R^n),C)$ sse esiste $s_C \in S_C$ t.c., per ogni $s' \in S$, $g(s_C, s'_{N \setminus C}) = a \neq b$, è $(a,b) \in \bigcap_{i \in C} P_i$. Diciamo che B domina b in (G, R^n) - e scriviamo $(B, b) \in Dom(G, R^n)$ sse esiste $C \subseteq N$ t.c. $(B, b) \in Dom((G, R^n), C)$. Si dice cuore (core) del gioco (G, R^n) l'insieme

$Co\,(G, R^n) \subseteq A$ delle alternative a A t.c. non esiste $B \subseteq A$:

$(B, a) \in Dom((G, R^n), C)$.

Si dimostra facilmente che

$$g\left[ENF\,(G, R^n) \right] \subseteq g\left[ENGF\,(G, R^n) \right] \subseteq Co\,(G, R^n)$$

(e l'inclusione è di solito propria).

Assumiamo ora che G sia un sg finito (questa assunzione sarà mantenuta implicitamente nel seguito, salvo avvertenza contraria). Una multistrategia $s \in S$ è un equilibrio sofisticato -o perfetto- (ES) per (G, R^n) sse $s \in S^{t^*}$ - il primo insieme stazionario della successione $\{S^t\}_{t \in \omega}$, cioè t^* è il minimo t t.c. $S^{t+1} = S^t$ - ove, $\{S^t\}_{t \in \omega}$ è definita per induzione come segue:

i) $S^\circ = \prod_{i=1}^{n} S^\circ_i = \prod_{i=1}^{n} S_i$

ii) $S^{t+1} = \Big\{ s^* \in S^t$ / per ogni $i \in N$, non esiste $s_i \in S^t_i$ t.c.:

a) per ogni $s_{-i} \in \overset{\times}{S}{}^t_{-i}$, $(g(s_i, s_{-i}), g(s^*_i, s_{-i})) \in R_i$ e

b) per qualche $s_{-i} \in S^t_{-i}$, $(g(s_i, s_{-i}), g(s^*_i, s_{-i})) \in P_i$,

con $g(s_i, s_{-i}) \neq g(s^*_i, s_{-i}) \Big\}$.

Per ogni ordine lineare P definito sull'insieme finito $A \subseteq X$, di cardinalità $\# A| = m$, e per ogni $k \in \{1, \dots, m\}$ definiamo $a_k(P) = \{ a \in A$ t.c. per qualche permutazione σ su A, $(a, a_{\sigma(i)}) \in P$, $i = 1, \ldots, k-1\}$ (segue ovviamente dalla definizione che $a_k(P)$ è un unico elemento ben definito per ogni $k \leqslant m$).

Poniamo quindi

$$\bar{g}(a_k(P), s_i) = \{ s_{-i} \in S_{-i} \;/\; g(s_i, s_{-i}) \} = a_k(P) \; .$$

Una multistrategia $s \in S$ è un equilibrio prudente (EP) -rispettivamente un equilibrio protettivo (EPT)- sse per ogni $i \in N$ non esistono $s_i' \in S_i$ e $k \leqslant m$ t.c. per ogni $t < k$

$$\# \bar{g}(a_t(P_i), s_i')| = \# \bar{g}(a_t(P_i), s_i)|$$

e

$$\# \bar{g}(a_k(P_i), s_i')| < \# \bar{g}(a_k(P_i), s_i)|$$ (rispettivamente t.c. per ogni $t < k$,

$$\bar{g}(a_t(P_i), s_i') = \bar{g}(a_t(P_i), s_i),$$

e

$$\bar{g}(a_k(P_i), s_i') \subset \bar{g}(a_k(P_i), s_i)).$$

Dei concetti di equilibrio appena definiti, ED, EN, ENG, EP, EPT fanno riferimento ad un contesto non cooperativo. D'altra parte, EP ed EPT rappresentano regole di comportamento razionale appropriate solo per una situazione di informazione incompleta, o -meglio ancora- di completa ignoranza. Al contrario ES ha senso solo in un contesto di informazione completa, e corrisponde essenzialmente al concetto di equilibrio di Nash perfetto per sottogiochi. E' stato R. Farquharson ad applicarlo per primo a problemi di scelta

collettiva. La caratteristica più interessante di ED (rispettivamente EDF) consiste nel fatto che tale concetto rappresenta una regola di comportamento intuitivamente plausibile in un contesto non-cooperativo (rispettivamente cooperativo) per ogni struttura-simmetrica-di informazione. Più ambigua invece è la situazione per EN, ENG, ENF, ENGF. Non c'è dubbio però che l'applicazione di EN ed ENF a situazioni di informazione incompleta richiederebbe -per essere davvero convincente- la specificazione di una dinamica di aggiustamento. E' facile controllare che, per ogni gioco (G, R^n), e con notazione ovvia,

$$\text{ED}(G, R^n) \subseteq \text{EN}(G, R^n),$$

$$\text{EDF}(G, R^n) \subseteq \text{ED}(G, R^n),$$

$$\text{ENF}(G, R^n) \subseteq \text{EN}(G, R^n),$$

$$\text{EDF}(G, R^n) \subseteq \text{ENF}(G, R^n).$$

Nel caso di profili lineari e sg finiti,

$$\text{ED}(G, R^n) \subseteq \text{ES}(G, R^n) \subseteq \text{EN}(G, R^n),\ \text{ED}(G, R^n) \subseteq \text{EP}(G, R^n) \subseteq \text{EPT}(G, R^n)$$

ed inoltre $\text{EP}(G, R^n) \neq \emptyset$, $\text{ES}(G, R^n) \neq \emptyset$.

Se $\mathcal{E}$ è un concetto di equilibrio,

$$\mathcal{E} \in \{\text{ED, EDF, EN, ENG, ENF, ENGF, ES, EP, EPT}\},$$

e G è un opportuno sg $(S; \varphi; g)$, si dice che G è $\mathcal{E}$-stabile sse per ogni $s \in S$, per ogni $\mathcal{R}^N_{\varphi(s)}$ e per ogni profilo $R^n \in \mathcal{R}^N_{\varphi(s)}$, $(G, R^n) \neq \emptyset$ -rispettivamente $(G, P^n) \neq \emptyset$ per ogni profilo $P^n \in \mathcal{P}^N_{\varphi(s)}$, nel caso lineare (cfr.

Peleg (1978, 1983), Hurwicz e Schmeidler (1978), Barbera (1980), Dutta (1984), Kim e Roush (1980), Moulin (1980a, 1983)).

Se G è uno sg E- stabile si dice che è inoltre E- risolubile sse per ogni profilo R^n e per ogni s, s' ∈ (G, R^n), g (s) = g (s') (cfr. ad es. Maskin (1979), Moulin (1979, 1981a), Kim e Roush (1982), Gretlein (1983)). Una funzione $e_G : \mathscr{R}^N \longrightarrow S$ si dice una E-selezione (di equilibri) per uno sg G = (S; φ; g) E-stabile sse, per ogni profilo R^n, $e_G (R^n) \in E(G, R^n)$. Ovviamente, se uno sg G = (S; A; g) è E-stabile ed e_G è una E-selezione per G, la composizione $g \circ e_G$ è una fss, e diciamo che G E-realizza $g \circ e_G$. Diciamo che una fss $f : \mathscr{R}^N_A \longrightarrow A$ è E-realizzabile sse esistono uno schema di gioco su A, G = (S; A; g), ed una E-selezione e_G per G t.c. $f = g \circ e_G$. Se F è lo sg associato alla fss f, e F E-realizza f, si dice che f è E-direttamente realizzabile.

Uno schema di gioco G = $(\prod_{i=1}^{n} S_i; A; g)$ si dice pre-simmetrico sse $S_i = S_j$, per i,j=1,...,n. Nel seguito ci limiteremo -per comodità- a schemi di gioco pre-simmetrici.

Uno schema di gioco G = (S; A; g) si dice anonimo (AN) sse per ogni $\sigma \in \Sigma(N)$ (insieme delle permutazioni su N), e per ogni $s \in S$, $g(s) = g(s_\sigma)$, ove $s_\sigma = (s_{\sigma(1)}, ..., s_{\sigma(n)})$. Uno sg G = (S; A; g) si dice neutrale (NT) sse per ogni $\pi \in \Pi(A)$ (insieme delle permutazioni su A) esistono permutazioni ϱ_i su S_i, i = 1, ..., n, t.c. $\pi g(s) = (g(\varrho_1(s_1), ..., \varrho_n(s_n)))$. AN

e NT sono tipici requisiti di simmetria per uno sg : essi richiedono un trattamento perfettamente simmetrico degli agenti e delle alternative, rispettivamente. Ad ogni sg G su A si può associare in modo naturale, una relazione binaria RE_G detta relazione di efficacia di G, definita tra $\mathscr{P}(N)$ e $\mathscr{P}(A)$ (cioè $RE_G \subseteq \mathscr{P}(N) \times \mathscr{P}(A)$) come segue.

Per ogni $C \subseteq N$ e $B \subseteq A$, (C, B) RE_G sse esiste $s^*_C \in S_C$ t.c., per ogni $s_{N\setminus C} \in S_{N\setminus C}$, $g(s^*_C, s_{N\setminus C}) \in B$.

La RE_G di G consente di definire due funzioni: la funzione di efficacia di G, $E_G : \mathscr{P}(N) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$ così definita:

$E_G(C) = \{B \subseteq A / (C, B) \in RE_G\}$ (per ogni $C \subseteq N$)

e la funzione 'duale', detta funzione di veto di G, $V_G : \mathscr{P}(N) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$, così definita:

$V_G(C) = \{B \subseteq A / (C, A\setminus B) \in RE_G\}$ (per ogni $C \subseteq N$).

(cfr. Moulin, Peleg (1982), Moulin (1981b, 1982, 1983), Peleg (1983), Dutta (1983, 1984)).

Naturalmente i requisiti di simmetria appena formulati per uno sg ammettono un analogo per le sue funzioni di efficacia e di veto, che ne rappresentano la forma caratteristica. Così, diciamo che la funzione di efficacia E_G di uno sg G è anonima -o anche che G è veto-anonimo (VAN)- sse per ogni C, $C' \subseteq N$, se $|C| = |C'|$ allora $E_G(C) = E_G(C')$.

Uno sg G su A si dice veto-neutrale (VNT) sse per ogni B, $B' \subseteq A$ e per ogni $C \subseteq N$ se $\# B| = \# B'|$ e $B \in E_G(C)$, allora $B' \in E_G(C)$. Se G è VNT possiamo definire la funzione v_G, con

$$v_G(C) = \max_{B \subseteq A} \{\# B \mid / (C; A \setminus B) \in RE_G\}.$$

Diciamo invece che uno sg VNT G è quasi -veto-anonimo (QVAN) (rispettivamente individualmente quasi veto·anonimo (QVAN) (I)) sse - sotto le stesse ipotesi - per ogni coppia di coalizioni (di individui).

$$| v_G(C) - v_G(C') | \leqslant I$$

(rispettivamente $| v_G(\{i\}) - v_G(\{j\}) | \leqslant 1$).

Naturalmente, è immediato verificare che E_G è anonima (rispettivamente neutrale) sse V_G lo è; questo giustifica la terminologia scelta. In pratica la E_G di uno sg G è una descrizione abbastanza accurata della distribuzione del potere tra gli agenti indotta da G, anche se, ovviamente, meno accurata di quella fornita da G stesso, presentato, per definizione, in forma normale. E' facile controllare che vale la seguente

Proposizione:

i) se G è AN allora è VAN

ii) se G è NT, allora è VNT. Le implicazioni inverse non valgono. In altri termini, VAN e VNT sono dei criteri di simmetria per uno sg più deboli dei corrispondenti AN e NT.

Un altro criterio fondamentale per la valutazione di uno sg è l'efficienza paretiana dei suoi equilibri. Se G è uno sg $\mathcal{E}$-stabile, ed e_G una

-selezione per G, diremo che G è e_G-efficiente su A (e scriviamo $E(\{e_G\})$) sse per ogni profilo R^n non esiste $y \in A$ t.c.

$$(y, g \circ e_G(R^n)) \in \bigcap_{i=1}^{n} R_i$$

e -per qualche $j \in \{I, \dots, n\}$ - $(g \circ e_G(R^n), y) \in P_j$. G è $\mathcal{E}$-efficiente (e scriviamo $E(\mathcal{E})$) se è $E(\{e_G\})$ per ogni $\mathcal{E}$-selezione e_G.

I criteri AN, VAN, VNT, QVAN si possono definire in modo esattamente analogo per una fss. Una fss f si dice neutrale (NT) sse per ogni profilo R^n e per ogni permutazione π su A - posto $\pi R^n = (\pi R_1, \dots, \pi R_n)$, con πR_i t.c. $(\pi(a), \pi(b)) \in \pi R_i$, sse $(a,b) \in R_i$, $i = 1, \dots, n$ - $f(R^n) = f(\pi R^n)$. Una fss f si dice autonoma (AUT) su A sse per ogni $a \in A$ esiste R^n t.c. $f(R^n) = a$. Ovviamente, se f è NT è anche AUT (non vale il viceversa).

Una fss f si dice efficiente (E) sse per ogni profilo R^n e per ogni $a \neq f(R^n)$ esiste $i \in \{I, \dots, n\}$: $(f(R^n), a) \in P_i$. Infine una fss si dice monotona (M) sse per ogni coppia di profili R^n, $\bar{R}^n$, vale $f(\bar{R}^n) = a$ nel caso che i) $f(R^n) = a$, ii) $R^n|_{A \setminus \{a\}} = \bar{R}^n|_{A \setminus \{a\}}$ e inoltre iii) per ogni $b \in A \setminus \{a\}$ e per ogni $i \in N$, se $(a, b) \in R_i$, allora anche $(a, b) \in \bar{R}_i$, e se $(b, a) \in R_i$, allora $(b, a) \in \bar{R}_i$. AN, NT e lo stesso E sono stati variamente criticati come criteri di valutazione per processi decisionali collettivi. Tuttavia la loro rilevanza normativa sembra difficilmente controvertibile, per una appropriata interpretazione e delimitazione dei processi di decisione collettiva a cui si intenda applicarli. Inoltre AN, NT, ed E sono stati di recente difesi in modo convincente anche da un punto di vista 'positivo', come condizioni per la costruzione di modelli formali capaci di produrre previsioni attendibili sull'esito di un processo di decisione collettiva (cfr. Armbruster e Boge (1983)).

3. *Alcuni schemi di gioco notevoli*

Descriviamo qui di seguito alcune famiglie di sg che costituiranno il materiale di base per i successivi teoremi di possibilità.

Esempio 1) Votazione mediante eliminazione per veti successivi (cfr. Peleg (1978), Mueller (1978), Moulin (1979, 1980, 1981a, 1981b, 1982, 1983) Moulin e Peleg (1982), Oren (1981), Gretlein (1983), Kim e Roush (1982), Barbera e Dutta (1982), Dutta (1983), Armbruster e Böge (1983)).

Si tratta di una famiglia di sg -che indicheremo con V- che consistono nel distribuire in modo appropriato poteri di veto agli agenti e nel replicare opportunamente le alternative in modo che l'esercizio di tali poteri di veto in successione determini la selezione di una alternativa, l'unica non eliminata.

Sia $\# A| = m$, $\# N| = n$. Sia ω l'insieme dei numeri naturali. Costruiamo ora due funzioni $\beta = \beta(m, n)$, $\gamma = \gamma(m, n)$, $\beta : A \longrightarrow \omega$, $\gamma : N \longrightarrow \omega$ t.c. rispettivamente:

i) $\sum_{a \in A} \beta(a) = q^* m$ ove $q^* = \min_{k \in \omega} \{ k / km > n \}$; (pertanto, se $m > n$,

$q^* = 1$; se invece $m \leqslant n$ allora esistono un $q \geqslant 1$, ed $r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ t.c. $n = qm + r$, e dunque $q^* = q+1$)

ii) a) $\sum_{i \in N} \gamma(i) = \sum_{a \in A} \beta(a) - 1 = q^* m - 1$, b) $\max_{i \in N} \gamma(i) - \min_{i \in N} \gamma(i) \leqslant 1$.

β determina il 'peso' -ovvero il numero di repliche- di ogni alternativa; γ determina il potere di veto di ogni agente. Si noti che le condizioni ii) a) e ii) b) possono sempre essere soddisfatte e determinano essenzialmente γ, data β. Posto $k = \max_{i \in N} \gamma(i)$, fissiamo in qualche modo -eventualmente mediante una lotteria a pari 'chances'- una sequenza $(\sigma^1, \ldots, \sigma^k)$ di k permutazioni su N, non necessariamente distinte. Per ogni $i \in N$, poniamo $S_i = \mathscr{P}^k_A$. Sia $\bar{\sigma}^j$ la restrizione di σ^j al sottoinsieme $\{ i \in N / \gamma(i) \geqslant j \}$, $j = 1, \ldots, k$; τ è invece la permutazione su $\{1, \ldots, \sum_{i \in N} \gamma(i)\}$ determinata dalla composizione ordinata delle $\bar{\sigma}^j$, cioè $\tau = \bar{\sigma}^k \circ \bar{\sigma}^{k-1} \ldots \circ \bar{\sigma}^1$. Per ogni multistrategia $\prod_{i=1}^n P^k_A$, τ induce in modo naturale una permutazione sugli $n \cdot k$ ordini lineari su A componenti, che indichiamo con $\tau^*(\prod_{i=1}^n P^k_i)$ (e $P_{\tau(t)}$ ne rappresenta la t-esima proiezione).

Poniamo ora $t_0 = 0$, $A_1 = \{ a(t) \in A$ / esiste $t \in \omega$, $\tau(t) \leqslant \sum_{i=1}^n \gamma(i)$: $\# \{ k / \tau(k) \leqslant \tau(t)$ e per ogni $b \in A \setminus \{a\} : (b, a) \in P_{\tau(k)} \}| \geqslant \beta(a)$; e, per ogni $b \in A \setminus \{a\}$, $\# \{ k / \tau(k) \leqslant \tau(t)$ e per ogni $c \in A \setminus \{b\} : (c, b) \in P_{\tau(k)} \}| < \beta(b) \}$.

Definiamo $a_{\pi(1)} = a(t_1)$ con $t_1 = \min_{1 \leqslant t \leqslant \sum_{i \in N} \gamma(i)} \{ t / a(t) \in A_1 \}$.

Continuando per induzione, definiamo ($i = 2, \ldots, m-1$)

$A_i = \{ a(t) \in A$ esiste $t \in \omega : \tau(t_{i-1}) < \tau(t) \leqslant \sum_{i=1}^n \gamma(i)$:

i) $\#\{ k \,/\,$ esiste $h \in \{0, 1, \ldots, i-1\}$ t.c. $\tau(t_h) < \tau(k)$ e per ogni $b \in A \setminus \{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(h)}\} : (b, a) \in P_{\tau(k)} \}| \geq \beta(a)$;

ii) per ogni $b \in A \setminus \{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(i-1)}, a\}$, $\#\{k \,/\,$ esiste $h \in \{1, \ldots, i-1\}$ t.c. $\tau(t_h) < \tau(k)$ e per ogni $b \in A \setminus \{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(h)}\}$, $(b, a) \in P_{\tau(k)}\}| < \beta(a)\}$ e $a_{\pi(i)} = a(t_i)$ con $t_i = \min\{t \,/\, a(t) \in A_i\}$.

Infine, poniamo $a_{\pi(m)} = A \setminus \{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m-1)}\}$, e quindi definiamo $f_v(\prod_{i=1}^{n} P_i^k) = a_{\pi(m)} = A \setminus \{a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(m-1)}\}$.

Uno sg della famiglia V è dunque della forma

$$V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma^1, \ldots, \sigma^k) = (\prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}_A^k; A; f_v)$$

con f_v definita come sopra. La procedura consiste nel determinare mediante le permutazioni σ^i, $i = 1, \ldots, k$ l'ordine in cui gli agenti sono chiamati -turno per turno- ad esercitare il loro diritto di veto sulle alternative non ancora eliminate. Un'alternativa è eliminata non appena riceve un numero di veti pari al suo 'peso', determinato da β. Si noti che in base alla formulazione appena presentata, ogni agente ha la possibilità di cambiare la sua 'strategia di veto' da un turno all'altro.

Una versione semplificata di V (cfr. Dutta (1983)) consiste nell'imporre che β e γ siano funzioni strettamente positive e che l'ordine di votazione e le strategie di veto degli agenti siano fissate una volta per tutte -senza possibilità di variazione da turno a turno. Si ottiene così lo sg diretto V

$$V(\beta^+(m, n); \gamma^+(m, n); \sigma) = (\prod_{i=1}^{n} \mathscr{P}_A; A; f_v)$$

che equivale evidentemente ad un caso particolare di V. Naturalmente segue dalla definizione che ogni elemento della famiglia V è uno sg individualmente quasi veto-anonimo (QVAN(I)). Inoltre, se β è una funzione costante, tale sg risulta anche veto- neutrale (VNT), e addirittura neutrale (NT).

Un'altra variante semplificata di V -anch'essa soddisfacente QVAN(I) e NT, ed essenzialmente equivalente alla precedente- può essere formulata come segue (cfr. Armbruster e Böge (1983)). Sia σ una qualsiasi permutazione su N, e -per ogni $k \in \omega$- sia $\hat{k}$ quell'unico $h \in \{1, \ldots, n\}$ t.c. esiste $s \in \omega$ con $k = sn+h$ (cioè h è congruo a k modulo n, $h \equiv k \ (n)$).

σ induce una permutazione $\tilde{\sigma}$ su ω così definita: $\tilde{\sigma}(k) = \sigma(\hat{k})$, per ogni $k \in \omega$. Poniamo quindi -per ogni profilo P^n-

$$a_{\sigma(1)}(P^n) = \{a \in A \,/\, \text{per ogni } b \in A \setminus \{a\}, (b, a) \in P_{\tilde{\sigma}(1)} \equiv P_{\sigma(\hat{1})}\}$$

$$a_{\sigma(i)}(P^n) = \{a \in A \,/\, \text{per ogni } b \in A \setminus \{a_{\sigma(1)}(P^n), \ldots, a_{\sigma(i-1)}(P^n)\} : (b, a) \in P_{\tilde{\sigma}(i)} \equiv P_{\sigma(\hat{i})}\}$$

(ovviamente $a_{\sigma(1)}(P^n), \ldots, a_{\sigma(i-1)}(P^n)$ sono univocamente definiti),

$$a_{\sigma(m)}(P^n) = A \setminus \{a_{\sigma(1)}(P^n), \ldots, a_{\sigma(m-1)}(P^n)\}.$$

Definiamo quindi $f_v : \mathscr{P}^n \longrightarrow A$ così: per ogni profilo P^n, $f_v(P^n) = a_{\sigma(m)}(P^n)$. Otteniamo lo sg diretto $V(\beta(m, n); \ (m, n); \sigma) = (\mathscr{P}^n; A; f_v)$ con β a valore costante 1.

I seguenti casi particolari sono di notevole interesse nell'analisi delle proprietà di V.

Caso 1) n, m sono relativamente primi. In tal caso possiamo applicare il seguente teorema elementare della teoria dei numeri.

Proposizione (Identità di Bezout): siano n, m relativamente primi; allora esistono r, $k \in \omega$ t.c. $r \cdot n = k \cdot m - 1$.

Pertanto, possiamo in questo caso definire β e γ come segue $\beta(a) = k$, $\gamma(i) = r$, per ogni $a \in A$ e $i \in N$. Gli elementi della corrispondente sottofamiglia di V -al variare delle permutazioni su N utilizzate- sono sg che soddisfano VAN e NT (cfr. Moulin (1981b, 1982, 1983), Moulin e Peleg (1982)).

Caso 2) $m \leqslant n+1$. β può essere definita in modo t.c. $\sum_{a \in A} \beta(a) = n+1$ (gli sg di V corrispondenti risultano VAN); in particolare, Peleg (cfr. Peleg, (1978)) ha formulato, per questo caso, una variante di V -che indicheremo con V'- che è addirittura anonima (AN). V' può essere descritto come segue. Sia π una permutazione su A, e, per ogni $i \in N$, sia $S_i = \mathscr{P}_A$; per ogni $P^n \in \mathscr{P}_A^N$ definiamo l'insieme

$$A^*(P^n) = \{ a \in A \ / \text{ esiste una permutazione } \sigma \in \Sigma(N) \text{ e un corrispondente sg } V(\beta(m,n), \gamma(m,n); \sigma) \in V \text{ -con } \beta \text{ costante di valore } 1\text{- t.c. } f_V(P^n) = a \} .$$

Infine, definiamo -per ogni profilo P^n -la funzione-risultato

$$f_{V'}(P^n) = a_{\pi(b^*)}$$

con

$$\pi(b^*) = \min_{b \in A} \left| \pi(b) \ / \ a_{\pi(b)} \in A^*(P^n) \right|$$

Otteniamo così lo sg diretto $V'(\pi;\beta) = (\mathscr{P}^N; A; f_{V'})$ che risulta per costruzione AN -ed anche quasi veto-neutrale (QVNT), se scegliamo β in modo che $\max_{a \in A} \beta(a) - \min_{a \in A} \beta(a) \leqslant 1$. Si noti inoltre che il caso in cui $m = n+1$ rientra come sottocaso particolare sia nel caso 1) che nel caso 2).

Esempio 2) Votazione per proposta e approvazione unanime (cfr. Armbruster, Böge (1983)).

Si tratta di una famiglia di sg -che indicheremo con PAU- caratterizzati dalla predeterminazione del numero di iterazioni T entro cui deve essere raggiunto un accordo e di una alternativa detta 'risultato di conflitto'- che si intende selezionata se dopo T iterazioni non si è pervenuti all'accordo. Una iterazione della procedura consiste semplicemente nella selezione -eventualmente casuale- di una permutazione σ su N; $\sigma(1)$ propone un'alternativa, $\sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ nell'ordine accettano o rifiutano la proposta, se nessun agente che li precede ha già posto il suo veto. Non appena un agente pone il proprio veto, si passa all'iterazione successiva; se -e solo se- una proposta non riceve veti, viene accettata.

In una versione semplificata, gli sg della famiglia PAU possono essere così descritti (con T numero programmato di iterazioni, $x^* \in X$ risultato di conflitto, $Y \subseteq X$ insieme delle alternative disponibili): posto 2^Y = insieme delle funzioni $f : Y \longrightarrow \{0,1\}$ ($f(y) = 1$ sta per "accettazione di y",

$f(y) = 0$ sta invece per "rifiuto di y"), definiamo -per ogni $i \in N$ -

$$S_i = \left\{ (y^T, f^T) \in (Y, 2^Y)^T \;/\; f_t(y_t) = 1 \;, t = 1, \dots, T \right\} .$$

Siano $\sigma_1, \dots, \sigma_T$ permutazioni su N. Definiamo quindi l'insieme

$$Y^* = \left\{ y \in Y \;/\; \text{esistono } t \in \{1, \dots, T\},\ f \in 2^Y \text{ t.c. } s_{\sigma_t(l)} = (y, f) \text{ e,} \right.$$

per ogni $l \in N$, posto $f_{\sigma_t(l)} = \left(s_{\sigma_t(l)}\right)_2$, è $\left. f_{\sigma_t(l)} = 1 \right\}$.

Infine, per ogni $s \in \prod_{i=1}^{n} S_i$, definiamo

$$g(s) = \begin{cases} Y_{\sigma_{t^*}(l)} \text{ con } t^* = \min\limits_{1 \le t \le T} \{ t \;/\; y_{\sigma_t(l)} \in Y^* \}, & \text{se } Y^* \neq \emptyset \\ x^* & \text{, se } Y^* = \emptyset \end{cases}$$

Otteniamo quindi lo sg PAU $(x^*; \sigma_1, \dots, \sigma_T) = (\prod_{i=1}^{n} S_i; Y; g)$. E' immediata la verifica che gli sg della famiglia PAU sono neutrali rispetto ad $Y \setminus \{x^*\}$, e VAN (e precisamente, per ogni coalizione C,

$$v_{PAU}(C) = \begin{cases} \# Y| & \text{se } x^* \notin Y \\ \# Y| - 1 & \text{se } x^* \in Y \end{cases}) .$$

Esempio 3) Votazione binaria per eliminazione maggioritaria (cfr. ad es. Mc Kelvey e Niemi (1978), Moulin (1979, 1980a), Gretlein (1983)). Secondo questa classe di schemi relativamente familiare - che indicheremo con EM -le alternative sono dapprima ordinate. Quindi le prime due sono confrontate mediante una votazione a maggioranza semplice. L'alternativa in minoranza è eliminata, e l'alternativa maggioritaria è confrontata con la successiva con lo stesso metodo, e così via. Nel caso che gli agenti siano in numero pari, se e quando due alternative ottengono lo stesso numero di voti, viene eliminata quella col numero d'ordine inferiore. In termini più precisi, dati N e A finiti, e fissata una permutazione π su A, poniamo -per ogni $i \in N$ - $S_i = \mathscr{P}_A$ e definiamo quindi per induzione la sequenza $(b_1(P^n), \dots, b_{m-1}(P^n))$, per ogni profilo P^n :

$$b_1(P^n) = \begin{cases} a_{\pi(1)} & \text{sse } \#\{ i \in N \;/\; (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}) \in P_i \}| \quad \#\{ i \in N / (a_{\pi(2)}, a_{\pi(1)}) \in P_i \}| \\ a_{\pi(2)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e per $j = 2, \dots, m - 1$

$$b_j(P^n) = \begin{cases} b_{j-1}(P^n) & \text{sse } \#\{ i \in N / (b_{j-1}(P^n), a_{\pi(j+1)}) \in P_i \}| \quad \#\{ i \in N / (a_{\pi(j+1)}, b_{(j+1)}) \in P_i \}| \\ a_{\pi(j+1)} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Infine, per ogni P^n, definiamo $f_{EM}(P^n) = b_{m-1}(P^n)$. Otteniamo così lo sg diretto EM $(\pi) = (\mathscr{P}^N; A; f_{EM})$. Risulta ovvio dalla definizione che ogni sg della famiglia EM soddisfa AN e VNT, ma non NT .

4. *Teoremi di possibilità*

In questa sezione studieremo alcune relazioni generali tra le proprietà di simmetria, stabilità ed efficienza di uno sg, ed alcune loro conseguenze per le particolari famiglie di sg appena descritte. Cominciamo col riassumere le principali proprietà di simmetria di tali schemi, già di volta in volta sottolineate (la notazione e le ipotesi di base sono naturalmente quelle delle sezioni iniziali).

Proposizione 1:

i) per ogni m, n, ogni $V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma^1, \ldots, \sigma^k)$ con β costante soddisfa QVAN(I) e NT.

ii) se m, n sono relativamente primi, allora esistono β_i, γ_i t.c. ogni schema $V(\beta_i; \gamma_i; \sigma^1, \ldots, \sigma^k) \in V$ soddisfa VAN e NT.

iii) se $m \leqslant n+1$, allora esiste β t.c. lo sg $V'(\pi; \beta)$ soddisfa AN e QVNT.

Proposizione 2: Per ogni $Y \subseteq X$, ogni sg PAU $(x^*; \sigma_1, \ldots, \sigma_T)$ su Y è VAN e neutrale rispetto a $Y \setminus \{x^*\}$.

Proposizione 3: Ogni sg EM(π) è AN e VNT.

Si noti che -se eccettuiamo il caso banale di $\nmid A \mid = 2$ - uno sg che soddisfi QVAN(I) non è dittatoriale, e dunque tutti gli sg di cui sopra sono non dittatoriali. Ne consegue, per il teorema di Gibbard-Satterthwaite, che nel caso di $\nmid A \mid \geqslant 3$ nessuno di essi è ED-stabile.

Ricordiamo per comodità che uno sg G è E-stabile (per $E \in \{$ED, EDF,

EN, ENF, ENG, ENGF, ES, EP, EPT$\}$, cfr. sez. 2) sse, per ogni profilo ammissibile P^n, $(G, P^n) \neq \emptyset$.

Lemma 1: Sia G uno sg su un opportuno insieme finito $A \subseteq X$; supponiamo inoltre che G sia E-stabile e soddisfi AN. Allora esiste una E-selezione (di equilibri) per G, $e_G : \mathcal{P}^N \longrightarrow S$, t.c. $g \circ e_G$ è una fss AN (detto in altri termini, g E-realizza la fss AN $g \circ e_G$).

Dimostrazione. La dim. è eseguita solo per il caso E=EN. Negli altri casi è perfettamente analoga.

a) cominciamo col dimostrare che, per ogni multistrategia s e permutazione $\sigma \in \Sigma(N)$, se $s \in EN(G; P^n)$ allora $s_\sigma = (s_{\sigma(1)}, \ldots, s_{\sigma(n)}) \in EN(G, P^n_\sigma)$.
Infatti -poichè G è AN- $g(s) = g(s_\sigma)$ e - per ogni $i \in N$ e $s'_i \in S_i$ -

$$g(s'_{\sigma(i)}, s_{-\sigma(i)}) = g(s'_i, s_{-i}) .$$

D'altra parte, per definizione di $EN(G, P^n)$ per ogni $i \in N$, e $s'_i \in S_i$:

$$(g(s), g(s'_i, s_{-i})) \in P_i$$

e dunque anche

$$(g(s_\sigma), g(s'_{\sigma(i)}, s_{-\sigma(i)})) \in P_{\sigma(i)}.$$

Pertanto $s \in EN(G, P^n_\sigma)$.

b) Si tratta ora di definire una selezione e_G appropriata. A questo scopo osserviamo che l'insieme delle permutazioni su N ha una struttura canonica di gruppo e induce tale struttura sull'insieme delle permutazioni di ogni profilo. Definiamo quindi sull'insieme $\mathcal{P}^N$ dei profili la seguente relazione binaria $\sim$: $P^n \sim (P^n)'$ sse esiste una permutazione t.c. $(P^n)' = P^n$. Per le proprietà di gruppo, segue immediatamente che $\sim$ è una equivalenza su $\mathscr{P}^N$. Per ogni classe di $\sim$-equivalenza scegliamo un profilo 'rappresentante' $\tilde{P}^n$, e definiamo quindi $e_G(\tilde{P}^n) = s$, con $s \in EN(G, P^n)$ (sappiamo infatti che $EN(G, P^n) \neq \emptyset$, per l'ipotesi di EN-stabilità di G). Inoltre, per ogni profilo $P^n \sim \tilde{P}^n$, scegliamo una permutazione σ t.c. $P^n_\sigma = \tilde{P}^n$, e definiamo $e_G(P^n) = s_\sigma$: la definizione ha senso per quanto dimostrato sub a).

Pertanto, per ogni profilo P^n e per ogni $\sigma \in \Sigma(N)$, $P^n \sim P^n_\sigma \sim \tilde{P}^n$ e quindi se $e_G(P^n) = s$, risulta per definizione $e_G(P^n) = s_{\sigma_1}$, $e_G(P^n) = s_{\sigma_2}$, con $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma(N)$. Ne consegue -poiché G è AN- che

$$g(e_G(P^n)) = g(s_{\sigma_1}) =$$
$$= g(s_{\sigma_2}) = g(e_G(P^n_\sigma)).$$

In altri termini, abbiamo dimostrato l'esistenza di una EN-selezione e_G t.c. -per ogni permutazione σ su N- il seguente diagramma risulta commutativo (ove σ^* indica la permutazione su $\mathscr{P}^N$ canonicamente indotta da σ) :

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}^N \arrow[rr, "\sigma^*"] \arrow[d, "e_G"'] & & \mathscr{P}^N \arrow[d, "e_G"] \\
S \arrow[dr, "g"'] & & S \arrow[dl, "g"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Q.E.D..

Definizione: Uno sg diretto su A, $F = (\mathscr{P}^N; A; f)$ si dice esattamente E-stabile sse F è E-stabile e, per ogni $P^n \in \mathscr{P}^N$, esiste $\bar{P}^n \in E(F, P^n)$ t.c. $f(\bar{P}^n) = f(P^n)$. La nozione di sg esattamente E-stabile è una immediata generalizzazione del concetto di fss esattamente consistente, dovuto a B. Peleg (Cfr. Peleg (1978), Dutta e Pattanaik (1978), Dutta (1980), Oren (1981)).

Definizione: Uno sg diretto F si dice non E-manipolabile (o anche, un meccanismo di E-rivelazione) sse F è E-stabile e, per ogni profilo P^n, $P^n \in E(F, P^n)$.

Lemma 2: Sia $F = (\mathscr{P}^N; A; f)$ uno sg diretto su A, esattamente E-stabile e NT. Allora F E-realizza una fss NT.

Dimostrazione. Se poniamo -per ogni profilo P^n- $e_F(P^n) = \bar{P}^n$, ove $\bar{P}^n$ è un qualsiasi profilo t.c. $\bar{P}^n \in E(F, P^n)$ e $f(\bar{P}^n) = f(P^n)$, risulta ovviamente che F E-realizza la fss $f \circ e_f$. Si tratta pertanto di dimostrare che $f \circ e_F$ è NT. Sia dunque $\pi \in \Pi(A)$ una permutazione su A, e π^* la trasformazione su $\mathscr{P}^N$ indotta da π (cioè, $\pi^* P^n = (\pi P_1, \ldots, \pi P_n)$, con πP_i t.c. $(a, b) \in P_i$ sse $(\pi(a), \pi(b)) \in \pi P_i$, per ogni $i \in N$ e $a, b \in A$). Poiché f è NT,

$$\pi f(P^n) = f \pi^*(P^n) \text{ per ogni } P^n.$$

Pertanto, $\pi(f \circ e_F(P^n)) = \pi(f(\bar{P}^n)) = f\, \pi^*(P^n) = f \circ e_F(\pi^*(P^n))$.

In altri termini, esiste una E-selezione e_F per F t.c., per ogni $\pi \in \Pi(A)$, il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{P}^N \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "e_F"'] & \mathscr{P}^N \arrow[d, "e_F"] \\
\mathscr{P}^N \arrow[r, "\pi^*"] \arrow[d, "f"'] & \mathscr{P}^N \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "\pi"'] & A
\end{tikzcd}$$

Q.E.D..

Naturalmente il lemma I lascia aperta la possibilità che uno sg $\mathcal{E}$-stabile e AN realizzi fss non AN. Si consideri l'esempio seguente, con $n = 4$, $A = \{x, y\}$ per lo sg $F = (\mathscr{P}^N; A; f_{EM})$. Siano P^n, $(P^n)'$, $(P^n)''$ tre profili così definiti : $P_1 = P_2 = P_3 = \{(x, y)\}$, $P_4 = \{(y, x)\}$. $(P^n)'$ è invece il profilo di preferenza unanime per x, $(P^n)''$ il profilo di preferenza unanime per y. E' immediato verificare che $\{P^n, (P^n)''\} \subseteq EN(G, P^n)$ (la votazione unanime per l'alternativa peggiore è un equilibrio di Nash per la votazione a maggioranza!).

Supponiamo dunque di scegliere e_F t.c. $e_F(P^n) = P^n$, $e_F(P^n_\sigma) = (P^n)''$ per qualche permutazione $\sigma \in \Sigma(N)$, $\sigma \neq Id$. Ovviamente la fss $f_{EM} \circ e_F$ non è AN.

Corollario:

i) Sia $G = (\prod_{i=1}^{n} S_i; A; g)$ uno sg $\mathcal{E}$-risolubile e AN. Allora, per ogni $\mathcal{E}$-selezione e_G, $g \circ e_G$ è una fss AN.

ii) Sia $F = (\mathscr{P}^N; A; f)$ uno sg diretto esattamente $\mathcal{E}$-stabile, $\mathcal{E}$-risolubile e NT. Allora, per ogni selezione e_F, $f \circ e_F$ è una fss NT.

Dimostrazione. i) sia $e_G : \mathscr{P}^N \longrightarrow S$ una qualsiasi $\mathcal{E}$-selezione. Per il lemma 1, esiste una $\mathcal{E}$-selezione $\bar{e}_G$ per G t.c. $g \circ \bar{e}_G$ è AN, cioè per ogni $\sigma \in \Sigma(N)$ e $P^n \in \mathscr{P}^N$, $g \circ \bar{e}_G(P^n) = g \circ \bar{e}_G(P^n)$. D'altronde per ipotesi

$e_G(P^n) = \bar{e}_G(P^n)$ per ogni $P^n \in \mathscr{P}^N$.

Pertanto,

$g \circ e_G(P^n) = g \circ \bar{e}_G(P^n) = g \circ \bar{e}_G(P^n) = g \circ e_G(P^n)$.

ii) Sia $e_F : \mathscr{P}^N \longrightarrow S$ una qualsiasi $\mathcal{E}$-selezione per F; per il lemma 2, esiste una $\mathcal{E}$-selezione $\bar{e}_F$ per F t.c. $g \circ \bar{e}_F$ è NT. Pertanto, per ipotesi di $\mathcal{E}$-risolubilità

$$\begin{aligned}
\pi \circ f \circ e_F(P^n) &= \pi \circ f \circ \bar{e}_F(P^n) = \\
&= f \circ \bar{e}_F \circ \pi^*(P^n) = \\
&= f \circ e_F \circ \pi^*(P^n), \text{ per ogni profilo } P^n.
\end{aligned}$$

Le proposizioni formulate qui sopra contribuiscono a mettere in luce in che misura l'esistenza di schemi di gioco dotati dei tipici requisiti di simmetria AN e NT e degli opportuni requisiti di stabilità può garantire la realizzabilità di funzioni di scelta sociale dotate di analoghe proprietà di simmetria. Naturalmente, per certi concetti di equilibrio, la combinazione di requisiti di simmetria e stabilità può risultare eccessivamente forte. E' il caso di ED-stabilità ed AN. Il teorema di Gibbard-Satterthwaite, più volte citato, implica in particolare che la richiesta di uno sg con tali requisiti ci confina di per sé al caso $|A| \leq 2$.

Per concetti di equilibrio meno forti, però, la situazione è più ricca di possibilità, come vedremo nel seguito.

E' il caso di osservare, innanzitutto, che dalla definizione di ES, EP, EPT, segue immediatamente che ogni sg (finito) è E-stabile (per $E \in \{$ES, EP, EPT$\}$). Pertanto, la nostra analisi delle proprietà di stabilità degli sg di tipo V, V', PAU, EM potrà limitarsi a EN, ENF, ENG, ENGF ed a problemi di esattezza e risolubilità.

Proposizione 4: i) ogni sg $V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma^1, \dots, \sigma^k) \in V$ è esattamente ENF-stabile. ii) ogni sg $V'(\pi; \beta) \in V'$ è esattamente ENF-stabile (Peleg (1978)).

Dimostrazione. La proposizione 4 i) è stata dimostrata da Dutta (cfr. Dutta (1983)) per il caso particolare di sg di tipo $V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma) \in V$.

Un semplice adattamento della sua dimostrazione al caso generale, che non riportiamo per brevità, è sufficiente (basta trattare il veto espresso da uno stesso agente in due turni distinti come l'espressione del veto

di due agenti distinti con le stesse preferenze).

Proposizione 5: Sia PAU $(x^*; \sigma_1, \dots, \sigma_T)$ uno sg della famiglia PAU; tale sg è ENF-stabile.

Dimostrazione. Sia P^n un profilo qualsiasi. Distinguiamo due casi.

Caso a) : P^n è t.c. esiste $j \in N$: $(x^*, y) \in P_j$, per ogni $y \in Y$. In tal caso, è facile verificare che ogni multistrategia la cui j-esima proiezione consiste nella combinazione della proposta di x^* e del veto su tutte le altre proposte -replicata T volte- è un ENF per il gioco (PAU $(x^*; \sigma_1, \dots, \sigma_T)$, P^n).

Caso b) Per ogni $i \in N$ esiste $y \in Y \setminus \{x^*\}$: $(y, x) \in P_i$. Consideriamo la multitrategia $\bar{s} = ((y_1^1, f_1^1), \dots, (y_1^T, f_1^T), \dots, (y_n^1, f_n^1), \dots, (y_n^T, f_n^T))$ ove, per ogni $i \in N$ e per ogni $t \in \{1, \dots, T-1\}$ e $y \in Y$

$$f_i^t(y) = \begin{cases} 1 \text{ se, per ogni } x \in Y \cup \{x^*\},\ (y, x) \in P_i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

e dunque per definizione y_i^t = alternativa P_i-ottima in $Y \cup \{x^*\}$; e, posto

$$Y^* = \left\{ y \in Y \cup \{x^*\} \ / \ (y, x^*) \in \bigcap_{i=1}^{N} P_i \right\},$$

$$f_i^T(y) = \begin{cases} 1 \text{ se } (y, x^*) \in P_i \\ 0 \text{ altrimenti} \end{cases}$$

$$y_i^T = \begin{cases} x \in Y^* \text{ t.c. per ogni } y \in Y^* : (x, y) \in P_i \text{ se } Y^* \neq \{x^*\} \\ x^* \text{ altrimenti} \end{cases}$$

Supponiamo per assurdo che $\bar{s}$ non sia un ENF per (PAU $(x^*; \sigma_1, \ldots, \sigma_T)$, P^n); dunque esistono $C \subsetneq N$ e $s_C \in S_C$ t.c. $(g(s_C, \bar{s}_{N \setminus C}),\ g(\bar{s})) \in \bigcap_{i \in C} P_i$, con $g(s_C, \bar{s}_{N\ C}) \neq g(\bar{s})$.

Distinguiamo i due casi $\sigma_T(1) \notin C$ e $\sigma_T(1) \in C$.

Poiché da $g(s_C, \bar{s}_{N\ C}) \neq g(\bar{s})$ e definizione di $\bar{s}$ segue che

$g(s_C, \bar{s}_{N\ C}) \neq x^*$, se $\sigma_T(1) \notin C$,

necessariamente esiste $t < T$ t.c. $\sigma_t(1) \in C$ e $g(s_C, \bar{s}_{N \setminus C}) = y_i^t$. Ma, per definizione di $\bar{s}$, y_i^t deve essere l'alternativa $P_{\sigma_T(1)}$-ottima (altrimenti sarebbe soggetta al veto di $\sigma_T(1)$ alla t-esima iterazione per ogni $t < T$). Lo stesso vale per ogni altro $i \in N \setminus C$.

Pertanto $(g(s_C, \bar{s}_{N \setminus C}), g(\bar{s})) \in P_{\sigma_T(1)}$ e quindi, per definizione di $\bar{s}$, $g(s_C, \bar{s}_{N \setminus C}) \notin Y^*$, ossia esiste $i \in N$ t.c. $(x^*, g(s_C, \bar{s}_{N\ C})) \in P_1$.

Se $i \in C$ otteniamo $(x^*, g(\bar{s})) \in P_i$, con $x^* \neq g(\bar{s})$, che è assurdo, per definizione di $\bar{s}$. Se invece $i \in N \setminus C$, otteniamo -ancora per definizione di $\bar{s}$- $f_i^t(g(s_C, \bar{s}_{N \setminus C})) = 0$, per ogni $t \in \{1, \ldots, T\}$, il che è ancora un assurdo, per la definizione di g. Pertanto $\bar{s}$ è un ENF del gioco

(PAU $(x^*; \sigma_1 \ldots, \sigma_T)$, P^n),

Q.E.D..

Definizione: Uno sg G si dice Co-stabile sse per ogni profilo $P^n \in \mathscr{P}_A^N$

$Co(G, P^n) \neq \emptyset$.

Proposizione 6: (Paradosso di Condorcet). Ogni sg EM(π) su A non è Co-stabile (cioè, per qualche profilo $P^n \in \mathscr{P}_A^N$, $Co(EM(\pi), P^n) = \emptyset$). Basta considerare il seguente classico esempio -per m=n=3-

$\bar{P}_1 = |\ (x, y), (y, z), (x, z)\ |$

$\bar{P}_2 = |\ (y, z), (z, x), (y, x)\ |$

$\bar{P}_3 = |\ (z, x), (x, y), (z, y)\ |$

Ovviamente, ne risulta

$(x, y) \in Dom\ (EM(\pi), \bar{P}, |1, 3|)$;

$(y, z) \in Dom\ (EM(\pi), \bar{P}, |1, 2|)$;

$(z, x) \in Dom\ (EM(\pi), \bar{P}, |2, 3|)$.

Proposizione 7:

i) Gli sg di tipo V, PAU, EM sono ES-risolubili. (Moulin (1979, 1980a, 1983), Gretlein (1982, 1983), Kim, Roush (1982), Armbruster, Böge (1983))

ii) Ogni sg $V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma) \in V$ è EPT- risolubile, ed è un meccanismo di EPT-rivelazione (Barbera, Dutta 1982)).

iii) Sia $F = (\mathscr{P}^N; A; f)$ uno sg diretto con f NT e M (monotòna). Allora F risulta un meccanismo di EP-rivelazione (Moulin (1980a).

iv) Sia $V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma^1, \ldots, \sigma^k) \in V$ con β t.c., per ogni $a \in A$, $\beta(a) = h$, con $h \in \omega \setminus \{0\}$; allora, se per ogni i (i = 1, ..., k), σ^{i+1} è la permutazione opposta di σ^i, esiste una EP-selezione che è equivalente alle

ES-selezioni (Moulin 1981a).

Veniamo ora alle proprietà di efficienza.

Proposizione 8:

i) Gli sg di tipo V, PAU, EM sono ES-efficienti. (Moulin (1979), Mueller (1978), Gretlein (1983)).

ii) Ogni sg V (β(m, n); γ (m, n); σ) $\in$ V è EPT- efficiente (Barbera, Dutta (1982)).

Ancora a proposito di efficienza è appena il caso di ricordare che ogni sg ENF-stabile risulta ovviamente ENF-efficiente.

Definizione: La funzione di efficacia E_G di uno sg $G = (\prod_{i=1}^{n} S_i;\ A;\ g)$ si dice massimale sse per ogni $C \subseteq N$ e per ogni $B \subseteq A$,

$B \in E_G(C)$ sse $A \setminus B \in E_G(N \setminus C)$.

Analogamente la funzione di efficacia E_f di una fss f si dice massimale sse per ogni $C \subseteq N$ e per ogni $B \subseteq A$,

$B \notin E_f(C)$ sse $A \setminus B \in E_f\ (N \setminus C)$.

La seguente proposizione dà alcune informazioni sul trasferimento delle proprietà 'deboli' di simmetria (QVAN(I), VAN, VNT) di uno sg alle fss che esso eventualmente realizza.

Proposizione 9:

i) Sia G uno sg ENF-stabile e QVAN (rispettivamente VAN, VNT) ed e_G una ENF-selezione per G. Supponiamo inoltre che la funzione di efficacia di G, E_G, sia massimale. Allora anche la fss $g \circ e_G$ è QVAN (rispettivamente VAN, VNT).

ii) Sia G uno sg EN-stabile con E_G massimale, che soddisfa QVAN (rispettivamente VAN, VNT), e sia e_G una EN-selezione per G. Allora anche la fss $g \circ e_G$ è QVAN (rispettivamente VAN, VNT).

iii) Sia $F = (\mathscr{P}^N;\ A;\ f)$ uno sg diretto EPT-risolubile e QVAN (rispettivamente VAN, VNT), e e_F una EPT-selezione per F; allora anche la fss $f \circ e_F$ è QVAN (rispettivamente VAN, VNT).

Dimostrazione.

i) la 9 i) segue immediatamente dal seguente lemma: sotto le nostre ipotesi, per ogni $C \subseteq N$ e $B \subseteq A$, $B \in E_G(C)$ sse $B \in E_{g \circ e_G}(C)$. Infatti, sia $B \in E_G(C)$, e supponiamo p.a. $B \in E_{g \circ e_G}(C)$. Ciò significa che per ogni $P_C \in \mathscr{P}^C$ esiste $P_{N \setminus C} \in \mathscr{P}^{N \setminus C}$ t.c. $g \circ e_G\ (P_C, P_{N \setminus C}) \in A \setminus B$. Supponiamo $\bar{P}_C \in \mathscr{P}^C$ t.c., per ogni $a \in A \setminus B$ e $b \in B$, $(a, b) \in \bigcap_{i \in C} P_i$ e $\bar{P}_{N \setminus C} \in \mathscr{P}^{N \setminus C}$ t.c. $g \circ e_G\ (\bar{P}_C\ ,\ \bar{P}_{N \setminus C}) \in A \setminus B$. Poniamo $\bar{s} = e_G\ (\bar{P}_C, \bar{P}_{N \setminus C})$. Per costruzione $\bar{s} \in ENF\ (G, \bar{P}^n)$. Ma $B \in E_G(C)$ implica che esiste $s_{N \setminus C} \in S^{N \setminus C}$ t.c. per ogni $s_C \in S^C$, $g(\bar{s}_C\ ,\ s_{N \setminus C}) \in A \setminus B$.

Quindi in particolare $g(\bar{s}_C\ ,\ s_{N \setminus C}) \in A \setminus B$. Ma allora, per costruzione di $\bar{P}^n$, $\bar{s} \notin ENF(G, \bar{P}^n)$, il che è assurdo. Viceversa, sia $B \in E_{g \circ e_G}(C)$, e supponiamo p.a. $B \notin E_G(C)$. Per l'ipotesi di massimalità di E_G, ciò implica $A \setminus B \in E_G(N \setminus C)$ e quindi, per la prima parte di questa dimostrazione,

$A \setminus B \in E_{gOe_G}(N \setminus C)$, di nuovo un assurdo per definizione di g, e_G, E_G.

ii) La dimostrazione è analoga a quella del punto i).

iii) Sappiamo, da un risultato di Barbera e Dutta (1982, teorema 1), da cui segue parte della Proposizione 7 ii), che F -essendo per ipotesi EPT-risolubile- è anche un meccanismo di EPT-rivelazione (il profilo sincero è sempre un EPT-equilibrio). Pertanto $Id_{\mathscr{P}N}$ è una EPT-selezione per F, e, ovviamente $fOId_{\mathscr{P}N} = f$. Inoltre, ancora per EPT-risolubilità, per ogni altra EPT-selezione e_F di F, vale che $B \in E_{fOe_F}(C)$ sse $B \in E_{fOId_{\mathscr{P}N}}(C)$ (per ogni $C \subseteq N$ e $B \subseteq A$). Ma ovviamente $E_f = E_{fOId_{\mathscr{P}N}}$. Da qui segue immediatamente la proposizione. Q.E.D..

Proposizione 10: Gli sg di tipo V, V', PAU, EM hanno funzione di efficacia massimale (la dimostrazione è immediata).

Possiamo ormai raccogliere i risultati fin qui richiamati o ottenuti per ricavare -nell'ambito dell'approccio prescelto- i seguenti, sostanzialmente noti,

Teoremi di possibilità:

i) Esistono sg -ad esempio sg di tipo $V(\beta(m, n); \gamma(m, n); \sigma) \in V$- che ES-realizzano fss soddisfacenti QVAN(I), NT, E (cioè individualmente quasi veto-anonime, neutrali, efficienti) e, nel caso di m, n relativamente primi, anche VAN (Mueller, (1978); Moulin, (1980a, 1983); Kim, Roush, (1982); Armbruster, Bôge, (1983)).

ii) Esistono sg (diretti) che ES-realizzano fss soddisfacenti AN, VNT, E (e AUT(autonomia)): ogni sg di tipo EM ha queste caratteristiche (Moulin, (1979, 1980a); Gretlein, (1982, 1983)).

iii) Esistono sg diretti -ad esempio gli sg del tipo $V(\beta(m,n); \gamma(m,n); \sigma) \in V$- che EPT-realizzano fss soddisfacenti QVAN(I), NT, E (Barbera, Dutta, (1982)).

iv) Esistono sg che ENF-realizzano fss soddisfacenti QVAN(I), NT (oltre che, ovviamente, E); gli sg di tipo $V(\beta(m,n); \gamma(m,n); \sigma^1, \ldots, \sigma^k) \in V$: ne sono un esempio (Moulin, Peleg (1982); Moulin (1982, 1983); Dutta (1983)).

v) Esistono sg che ENF-realizzano fss soddisfacenti VAN, NT rispetto ad un opportuno s.i. di X (oltre che E): ad esempio gli sg di tipo PAU.

vi) Se $m \leqslant n+1$, esistono sg di tipo $V'(\pi; \beta) \in V'$ che ENF-realizzano fss soddisfacenti AN, QVNT (oltre che E) (Peleg (1978); Moulin, Peleg (1982); Pattanaik (1978); Oren (1981); Moulin (1982, 1983)).

5. *Confronto con i teoremi di impossibilità e discussione.*

L'interpretazione dei teoremi di possibilità appena enunciati impone innanzitutto un confronto col teorema di Gibbard-Satterthwaite. Questo risultato di impossibilità emerge dalla combinazione di un debolissimo criterio di simmetria -o meglio, potremmo dire, di non asimmetria- e cioè, l'assenza di dittatori, e di un fortissimo requisito di stabilità, la ED-stabilità (stabilità per equilibri dominanti). Mancano addirittura requisiti di efficienza. E' evidente, dal confronto di questo risultato coi teoremi di possibilità di cui sopra, che il punto chiave sta nei requisiti di stabilità. Si tratta allora di chiarire che cosa significa rinunciare alla ED-stabilità per criteri di stabilità più deboli.

Nel nostro, come in altri dominî di applicazione della teoria dei giochi, l'adozione di un certo concetto di equilibrio non è che un modo comodo di assiomatizzare la struttura dell'informazione prevalente (oltre che, s'intende, la presenza o l'assenza di cooperazione). Gli equilibri di tipo ED (rispettivamente EDF, nel caso cooperativo) hanno l'importante caratteristica di rappresentare un plausibile comportamento razionale indipendentemente dal grado di informazione degli agenti sul profilo 'sincero' di volta in volta rilevante.

Pertanto uno schema di gioco ED-stabile (rispettivamente EDF-stabile) assicura una decentralizzabilità "perfetta" della (funzione di) scelta sociale, nel senso dell'indipendenza da particolari ipotesi sulla struttura dell'informazione disponibile agli agenti ed eventualmente sul loro comportamento in condizioni di incertezza. Di conseguenza, la rinuncia alla ED-stabilità ha indubbiamente alcune spiacevoli e rilevanti implicazioni. I teoremi di possibilità di cui alla sez. precedente ci dimostrano però che tale sacrificio ci garantisce una adeguata ricompensa. In realtà, possiamo decentralizzare

funzioni di scelta sociale che soddisfano un'opportuna combinazione di criteri di efficienza e di simmetria.

Il prezzo da pagare è il seguente: per poter realizzare al meglio una tale combinazione di efficienza e simmetria dovremo supporre di conoscere la struttura dell'informazione prevalente (ad es. informazione completa, o ignoranza completa), formulare un concetto di equilibrio adeguato, e applicare un corrispondente appropriato schema di gioco. Inoltre, nel caso cooperativo avremo, come al solito, problemi di molteplicità degli equilibri. D'altra parte gli schemi di tipo V (votazione per veti successivi) godono, come abbiamo visto, di notevoli proprietà di stabilità e di risolubilità. Questo ci assicura che funzioneranno generalmente bene per un'ampia varietà di ambienti, rendendo quindi meno 'pesante' il prezzo di cui sopra. Al contrario, una procedura di tipo maggioritario -ad es. EM- combina notevoli proprietà di simmetria con gravi problemi di instabilità ed inefficienza.

Nel complesso, una procedura di tipo EM sembra applicabile solo in ambienti non-cooperativi con informazione completa (due caratteristiche la cui combinazione, com'è noto, è esposta a non trascurabili obiezioni circa il grado di realismo) mentre in condizioni di ignoranza può funzionare solo se EP è il concetto di equilibrio appropriato (cfr. Moulin, (1980a)).

Incidentalmente, è forse di qualche interesse il fatto che alcuni tipici difetti dei metodi maggioritari messi in rilievo nelle analisi puramente normative (ad es., possibilità di 'tirannia della maggioranza') riemergono qui come problemi di instabilità e quindi di minore applicabilità rispetto ad altri schemi.

Il confronto dei teoremi di possibilità della sezione precedente col teorema di impossibilità di Arrow è ovviamente più complicato. Infatti i teoremi di impossibilità di tipo arrowiano -comprese le numerose generalizzazioni e variazioni- riguardano (anziché funzioni di scelta sociale) funzioni di aggregazione. Una funzione di aggregazione sociale (fas) è una funzione che associa ad ogni profilo di relazioni binarie su un certo insieme una relazione binaria sullo stesso insieme (per un opportuno dominio di profili ed un opportuno codominio di relazioni binarie complete prefissati). L'originario teorema di Arrow, come noto, si riferisce a quelle particolari funzioni di aggregazione che sono le c.d. 'funzioni del benessere sociale'.

Definizione: Una funzione del benessere sociale per n individui (fbs) sull'insieme A (debolmente ristretta) è una funzione F definita sull'insieme $\mathscr{R}^N$ dei profili di preordini completi su A (rispettivamente definita sull'insieme $\mathscr{P}^N$ dei profili di ordini lineari su A) ed a valori nell'insieme dei preordini completi su A.

L'unica condizione che Arrow impone alla fbs -oltre alle usuali assenza di dittatori (ND) ed efficienza (E)- è la ben nota 'indipendenza dalle alternative irrilevanti', che gioca in effetti un ruolo essenziale nella dimostrazione dei teoremi di tipo arrowiano.

Definizione: Una fbs F per n individui su A soddisfa 'indipendenza (binaria) dalle alternative irrilevanti' (IIA) sse per ogni (coppia) $B \subseteq A$, e per ogni coppia di profili R^n, $(R^n)'$ t.c. per ogni $i \in N$: $R_{i|B} = R'_{i|B}$, vale

$$(F(R^m))_{|B} = (F(R^n)')_{|B}\ ,$$

ove con la notazione $T_{|B}$ si intende ovviamente la restrizione di una relazione binaria T definita su A al sottoinsieme $B \subseteq A$. (La definizione si estende in modo ovvio al caso di fbs debolmente ristrette).

Da un punto di vista formale, IIA può essere visto come un (debole) requisito di neutralità per funzioni di aggregazione. Ma il fatto per noi più interessante è che nel caso di fbs debolmente ristrette IIA è condizione necessaria e 'quasi' sufficiente di ED-stabilità della fss canonicamente associata alla fbs in questione. Per poter formulare nella sua piena generalità questa notevole connessione tra il problema di Arrow e il problema di Gibbard-Satterthwaite (cfr. Schmeidler, Sonnenschein (1978), Dasgupta, Hammond, Maskin (1979)) dobbiamo però introdurre ancora alcune definizioni.

Definizione: Sia F: $\mathscr{P}^N \longrightarrow \mathscr{R}$ una funzione di aggregazione definita sull'insieme dei profili lineari su A. Diciamo che F soddisfa la condizione di associazione positiva forte (APF) sse per ogni coppia di alternative a, $b \in A$ e per ogni coppia di profili lineari P^n, $(P^n)' \in \mathscr{P}^N$: se per ogni $i \in N$ $(a, b) \in P_i$ implica $(a, b) \in (P_i)'$, allora $(a, b) \in F(P^n)$ implica $(a, b) \in F((P^n)')$.

E' immediato verificare che, nel caso di fbs debolmente ristrette, APF implica IIA. APF è in sostanza una condizione assai forte di monotonìa su F.

Definizione: Siano f una fss e F una fas definite sulio stesso dominio $\mathscr{D}$. Diciamo allora che f massimizza F sse per ogni profilo $R^n \in \mathscr{D}$, se $f(R^n) = a$, allora per ogni $b \in A$, $(a, b) \in F(R^n)$ e, per ogni $b \in A \setminus \{a\}$, $(b, a) \notin F(R^n)$.

Osserviamo infine il seguente semplice fatto: se G è uno sg ED-stabile (sul dominio dei profili lineari definiti su un certo insieme), allora è anche ED-risolubile.

Siamo finalmente in grado di enunciare il seguente notevole risultato:

Proposizione 11 :(Dasgupta, Hammond, Maskin, (1979), teorema 4.7.1): Sia f una fss debolmente ristretta (cioè definita per tutti e soli i profili lineari); sia $F = (\mathscr{P}^N; A; f)$ lo sg diretto associato ad f. Allora F è ED-stabile, ed ED-risolubile, sse F è EDF-stabile, ed EDF-risolubile, sse f massimizza una fas F' debolmente ristretta e soddisfacente APF.

Poichè se F' è APF, allora -come già osservato- è anche IIA, IIA risulta condizione necessaria di ED-stabilità dello sg diretto determinato dalla fss associata a F'. Un'altra conseguenza della Prop. 11 è che se F' è IIA e APF, come nella originaria (1951) formulazione del teorema di Arrow, allora la fss f che la massimizza, ovvero per la precisione lo sg diretto F -canonicamente associato a F' attraverso f- è ED-stabile.

In conclusione, si può dire che IIA 'nasconde' un requisito di stabilità assai forte: grazie alla proposizione 11 si può anzi dire che, in un senso preciso, la condizione IIA per una fbs -se combinata con quel 'minimo' di monotonia che la rende equivalente ad APF-, è un requisito più forte della ED-stabilità dello sg diretto ad essa associato.

Non rimane dunque da considerare che l'altra proprietà distintiva di una fbs: la transitività -e completezza- delle sue relazioni immagine. Questo aspetto ci introduce ai c.d. problemi di 'razionalità collettiva'. Come noto, molti studiosi hanno voluto vedere nell'indebolimento dei requisiti di 'razionalità collettiva' impliciti nella fbs una via d'uscita dal paradosso di Arrow -o addirittura la più interessante o l'unica- (cfr. ad es. Bandyopadhyay, (1984), per una recente rassegna critica).

Una prima osservazione da fare in proposito è la seguente: se il teorema di Arrow è considerato come membro di una famiglia di teoremi di impossibilità interconnessi di cui il teorema di Gibbard-Satterthwaite è un altro importante elemento, allora nessun indebolimento dei c.d. criteri di 'razionalità collettiva' -intesa come transitività o come aciclicità- è sufficiente a evitare tutti quei risultati di impossibilità.

L'altra questione interessante è: quanto dei criteri tradizionali di 'razionalità collettiva' è compatibile coi teoremi di possibilità della sezione precedente? La risposta è: molto poco.

Naturalmente, ogni fss f massimizza una fbs F' definita sullo stesso dominio. E' sufficiente infatti considerare la fbs F' definita così: per ogni profilo $P^n \in \mathscr{P}^N$, e per ogni $a, b \in A \setminus \{f(P^n)\}$, $(f(P^n), a) \in F'(P^n)$,

$$(a, f(P^n)) \notin F'(P^n)$$

e

$$(a, b) \in F'(P^n) \text{ sse } (a, b) \in \bar{P}$$

ove $\bar{P}$ è un qualsiasi ordine lineare fissato su $A \setminus \{f(P^n)\}$.

Così, anche le fss dei nostri teoremi di possibilità massimizzano delle fbs, ma è immediato verificare che tali fbs non soddisfano APF, nè IIA.

Variazioni nell'insieme delle alternative disponibili produrranno in genere variazioni in linea di principio del tutto irregolari nella scelta finale. Ciò può sembrare inaccettabile solo se si ritiene che la scelta collettiva sia un processo che si inizia in un istante in cui l'insieme delle alternative che sarà disponibile al momento della scelta è parzialmente ignoto. Solo in questo caso infatti il processo di scelta collettiva sarà vincolato a procedere 'pezzo a pezzo' col successivo confronto di insiemi di scelta corrispondenti a diversi insiemi di alternative.

Non sembra però che questo sia il caso prevalente. Per di più, per generare teoremi di impossibilità sono sufficienti condizioni assai deboli di regolarità o 'coerenza' sugli insiemi di scelta di insiemi diversi (cfr. Bandyo-

padhyay, (1984)).

In definitiva, -rispetto alle fbs arrowiane- le fss dei nostri teoremi di possibilità assicurano in generale una maggiore 'risolutezza', garantendo sempre l'univocità della scelta. Tuttavia, come abbiamo appena visto, le fss sono molto più sensibili delle fbs alla esatta definizione dell'insieme delle alternative disponibili.

Per dirla in termini intuitivi, e con un lieve abuso di linguaggio, l'alternativa selezionata da una fss per un dato profilo può variare al variare dell'insieme delle alternative disponibili (e ciò è vero anche se tali variazioni riguardano solo alternative che risultano 'subottimali', nel senso che -per quel profilo- non vengono comunque scelte).

Questo è indubbiamente un difetto delle fss, da cui sono invece esenti le fbs. Ma caratterizzare questa differenza di prestazioni tra fss e fbs come 'assenza (contro presenza) di razionalità collettiva' sembra fuorviante, per quanto osservato sopra. Meglio sarebbe riconsiderare ed eventualmente riformulare i criteri di 'razionalità collettiva'. Piuttosto, è ancora una volta in termini strategici che può essere caratterizzato l'aspetto essenziale di questa differenza di prestazioni fra fss e fbs. Infatti, se un processo di scelta collettiva è rappresentabile da una fss (ma non da una fbs), l'esatta definizione dell'insieme delle alternative disponibili potrà risultare soggetto a manipolazione 'strategica' (cfr. Moulin, (1983), cap. 3, per interessanti osservazioni in proposito).

Sembra di poter concludere che il conflitto essenziale messo in luce dai teoremi di impossibilità è quello tra simmetria, efficienza e stabilità di un meccanismo decisionale, quando l'informazione rilevante è 'decentralizzata' (cioè dispersa tra gli agenti, e da essi trasmessa).

Si tratta di un conflitto pervasivo, niente affatto legato alla finitezza e/o alla mancanza di struttura dell'insieme delle alternative, caratteristiche della teoria 'pura' delle scelte collettive. Ad esempio, il teorema di Gibbard-Satterthwaite, ed altri analoghi teoremi di impossibilità, sono essenzialmente estendibili ad ambienti tipicamente 'economici' -vale a dire al caso in cui i profili sono economie, sia in presenza di beni pubblici che con soli beni privati (divisibili)- (cfr. ad es. Dasgupta, Hammond, Maskin, (1979); Postlewaite, Schmeidler, (1979)).

I teoremi di possibilità della sezione precedente ci danno alcune interessanti informazioni mostrando come, e in che misura, tale conflitto può essere superato, per una classe notevole di problemi di scelta collettiva.

Riferimenti bibliografici

Armbruster W., W. Böge: Efficient, Anonymous, and Neutral Group Decision Procedures, Econometrica (51), 1983.

Bandyopadhyay T.: On the Frontier between Possibility and Impossibility Theorems in Social Choice, Journal of Economic Theory (32), 1984.

Barbera S.: Stable Voting Schemes, Journal of Economic Theory (23), 1980.

Barbera S., B. Dutta: Implementability via Protective Equilibria, Journal of Mathematical Economics (10), 1982.

Batteau P., J.M. Blin, B. Monjardet: Stability of Aggregation Procedures, Ultrafilters, and Simple Games, Econometrica (49), 1981.

Dasgupta P., P. Hammond, E. Maskin: The Implementation of Social Choice Rules: Some General Results on Incentive Compatibility, Review of Economic Studies (46), 1979.

Dutta B.: On the Possibility of Consistent Voting Procedures, Review of Economic Studies (47), 1980.

Dutta B.: Further Results on Voting with Veto, in P.K. Pattanaik, M. Salles (eds.): Social Choice and Welfare. Amsterdam 1983.

Dutta B.: Effectivity Functions and Acceptable Game Forms, Econometrica (52), 1984.

Dutta B., P.K. Pattanaik: On Nicely Consistent Voting Systems, Econometrica (46), 1978.

Gretlein R.J.: Dominance Solvable Voting Schemes: A Comment, Econometrica (50), 1982.

Gretlein R.J.: Dominance Elimination Procedures on Finite Alternative Games, International Journal of Game Theory (12), 1983.

Hurwicz L., D. Schmeidler: Construction of Outcome Functions Guaranteeing Existence and Pareto Optimality of Nash Equilibria, Econometrica (46), 1978.

Ishikawa S., K. Nakamura: The Strategy Proof Social Choice Functions, Journal of Mathematical Economics (6), 1979.

Jacobs K.: Socio-Combinatorics, in O. Moeschlin, D. Pallaschke (eds.): Game Theory and Related Topics, Amsterdam 1979.

Kim K.H., F.W. Roush: Introduction to Mathematical Consensus Theory, New York 1980.

Kim K.H., F.W. Roush: Dominance Solvable Games and Trees, Mathematical Social Sciences (2), 1982.

Maskin E.: Implementation and Strong Nash Equilibrium, in J.J. Laffont (ed.): Aggregation and Revelation of Preferences, Amsterdam 1979.

McKelvey R., R. Niemi: A Multistage Game Representation of Sophisticated Voting for Binary Procedures, Journal of Economic Theory (18), 1978.

Moulin H.: Dominance Solvable Voting Schemes, Econometrica (47), 1979.

Moulin H.: La stratégie du vote, Paris 1980a.

Moulin H.: Implementing Efficient, Anonymous and Neutral Social Choice Functions, Journal of Mathematical Economics (7), 1980b.

Moulin H.: Prudence versus Sophistication in Voting Strategy, Journal of Economic Theory (24), 1981a.

Moulin H.: The Proportional Veto Principle, Review of Economic Studies (48), 1981b.

Moulin H.: Voting with Proportional Veto Power, Econometrica (50), 1982.

Moulin H.: The Strategy of Social Choice, Amsterdam 1983.

Moulin H., B. Peleg: Cores of Effectivity Functions and Implementation Theory, Journal of Mathematical Economics (10), 1982.

Mueller D.C.: Voting by Veto, Journal of Public Economics (10), 1978.

Oren I.: The Structure of Exactly Strongly Consistent Social Choice Functions, Journal of Mathematical Economics (8), 1981.

Packel E.W., D.G. Saari: Strategic Equilibria and Decisive Set Structures for Social Choice Mechanisms, Mathematical Social Sciences (2), 1982.

Pattanaik P.K.: Strategy and Group Choice, Amsterdam 1978.

Peleg B.: Consistent Voting Systems, Econometrica (46), 1978.

Peleg B.: A Theory of Coalition Formation in Committees, Journal of Mathematical Economics (7), 1980.

Peleg B.: On Simple Games and Social Choice Correspondences, In P.K. Pattanaik, M. Salles (eds.): Social Choice and Welfare, Amsterdam 1983.

Postlewaite A., D. Schmeidler: Notes on Optimality and Feasibility of Informationally Decentralized Allocation Mechanisms, in O. Moeschlin, D. Pallaschke (eds.): Game Theory and Related Topics, Amsterdam 1979.

Schmeidler D., H. Sonnenschein: Two Proofs of the Gibbard-Satterthwaite Theorem on the Possibility of a Strategy-Proof Social Choice Function, in H. Gottinger, W. Leinfellner (eds.): Decision Theory and Social Ethics. Issues in Social Choice, Dordrecht 1978.

Sen(gupta) M.: Implementable Social Choice Rules. Characterization and Correspondence Theorems under Strong Nash Equilibrium, Journal of Mathematical Economics (11), 1983.

Elenco dei Quaderni pubblicati

n. 10 (dicembre 1980)
SILVANO VICARELLI
Note su ammortamenti, rimpiazzi e tasso di crescita

n. 10 bis (aprile 1981)
LIONELLO F. PUNZO
Does the standard system exist?

n. 11 (marzo 1982)
SANDRO GRONCHI
A meaningful sufficient condition for the uniqueness of the internal rate of return

n. 12 (giugno 1982)
FABIO PETRI
Some implications of money creation in a growing economy

n. 13 (settembre 1982)
RUGGERO PALADINI
Da Cournot all'oligopolio: aspetti dei processi concorrenziali

n. 14 (ottobre 1982)
SANDRO GRONCHI
A Generalized internal rate of return depending on the cost of capital

n. 15 (novembre 1982)
FABIO PETRI
The Patinkin controversy revisited

n. 16 (dicembre 1982)
MARINELLA TERRASI BALESTRIERI
La dinamica della localizzazione industriale: aspetti teorici e analisi empirica

n. 17 (gennaio 1983)
FABIO PETRI
The connection between Say's law and the theory of the rate of interest in Ricardo

n. 18 (gennaio 1983)
GIULIO CIFARELLI
Inflation and output in Italy: a rational expectations interpretation

n. 19 (gennaio 1983)
MASSIMO DI MATTEO
Monetary conditions in a classical growth cycle

n. 20 (marzo 1983)
MASSIMO DI MATTEO - MARIA L. RUIZ
Effetti dell'interdipendenza tra paesi produttori di petrolio e paesi industrializzati: un'analisi macrodinamica

n. 21 (marzo 1983)
ANTONIO CRISTOFARO
La base imponibile dell'IRPEF: un'analisi empirica (marzo 1983)

n. 22 (gennaio 1984)
FLAVIO CASPRINI
L'efficienza del mercato dei cambi. Analisi teorica e verifica empirica

n. 23 (febbraio 1984)
PIETRO PUCCINELLI
Imprese e mercato nelle economie socialiste: due approcci alternativi

n. 24 (febbraio 1984)
BRUNO MICONI
Potere prezzi e distribuzione in economie mercantili caratterizzate da diverse relazioni sociali

n. 25 (aprile 1984)
SANDRO GRONCHI
On investment criteria based on the internal rate of return

n. 26 (maggio 1984)
SANDRO GRONCHI
On Karmel's criterion for optimal truncation

n. 27 (giugno 1984)
SANDRO GRONCHI
On truncation "theorems"

n. 28 (ottobre 1984)
LIONELLO F. PUNZO
La matematica di Sraffa

n. 29 (dicembre 1984)
ANTONELLA STIRATI
Women's work in economic development process

n. 30 (gennaio 1985)
GIULIO CIFARELLI
The natural rate of unemployment and rational expectation hypotheses: some empirical tests.

n. 31 (gennaio 1985)
SIMONETTA BOTARELLI
Alcuni aspetti della concentrazione dei redditi nel Comune di Siena

n.32 (febbraio 1985)
FOSCO GIOVANNONI
Alcune considerazioni metodologiche sulla riforma di un sistema tributario

n. 33 (febbraio 1985)
SIMONETTA BOTARELLI
Ineguaglianza dei redditi personali a livello comunale

n. 34 (marzo 1985)
IAN STEEDMAN
Produced inputs and tax incidence theory

n. 35 (aprile 1985)
RICHARD GOODWIN
Prelude to a reconstruction of economic theory. A critique of Sraffa

n. 36 (aprile 1985)
MICHIO MORISHIMA
Classical, neoclassical and keynesian in the Leontief world

n. 37 (aprile 1985)
SECONDO TARDITI
Analisi delle politiche settoriali: prezzi e redditi nel settore agroalimentare

n. 38 (maggio 1985)
PIETRO BOD
Sui punti fissi di applicazioni isotoniche