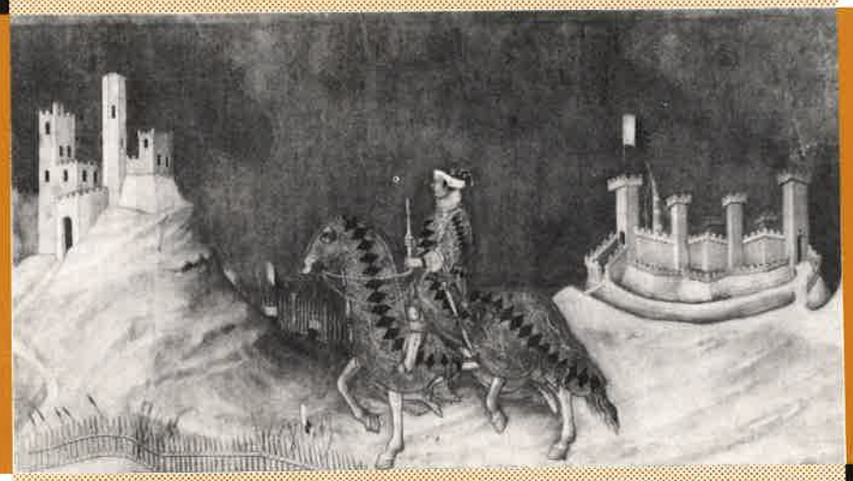
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie

44

QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

Marco Lonzi

ASPETTI MATEMATICI NELLA RICERCA DI CONDIZIONI DI UNICITA' PER IL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO



QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

COMITATO SCIENTIFICO

MARCELLO DE CECCO

MASSIMO DI MATTEO

RICHARD GOODWIN

SANDRO GRONCHI

GIACOMO PATRIZI

SILVANO VICARELLI

Coordinatore

SANDRO GRONCHI

Alla presente Collana "gialla" di quaderni l'Istituto di Economia affianca una Collana "celeste" di monografie. I numeri pubblicati a tutt'oggi sono i seguenti:

1) **GIUSEPPE DELLA TORRE,** Istituzioni Creditizie ed Accumulazione del Capitale in Italia (1948-81), 1984.
2) **SANDRO GRONCHI,** Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: una Analisi Teorica, 1984.
3) **ALDINO MONTI,** La Proprietà Immobiliare a Bologna in Età Napoleonica (1797-1810), 1984.
4) **GIULIO CIFARELLI,** Equilibrium and Disequilibrium Interpretations of Inflation, 1985.

- Redazione: Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie - Piazza S. Francesco, 17 - 53100 Siena - tel. 0577/49059

- La Redazione ottempera agli obblighi previsti dall'Art. 1 del D.L.L. 31.8.45 n. 660

- Le richieste di copie della presente pubblicazione dovranno essere indirizzate alla Redazione

- I **Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena** vengono pubblicati dal 1979 come servizio atto a favorire la tempestiva divulgazione di ricerche scientifiche originali, siano esse in forma provvisoria o definitiva. I **Quaderni** vengono regolarmente inviati a tutti gli istituti e dipartimenti italiani, a carattere economico, nonché a numerosi docenti e ricercatori universitari. Vengono altresì inviati ad enti e personalità italiane ed estere. L'accesso ai **Quaderni** è approvato dal Comitato Scientifico, sentito il parere di un referee.

Marco Lonzi

ASPETTI MATEMATICI NELLA RICERCA DI CONDIZIONI DI UNICITA' PER IL TASSO INTERNO DI RENDIMENTO

Siena, novembre 1985

Marco Lonzi è Professore presso l'Istituto di Matematica della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università di Siena.

1. *Introduzione*

E' tuttora attuale il problema dello studio del segno, della monotonia e del numero degli eventuali zeri della D.P.V.:

$$(1)\qquad \begin{cases} F(r;\alpha) = \sum_{k:0}^{n} \alpha_k \cdot (1+r)^{-k} \\ -1 < r < +\infty \end{cases}$$

associata al vettore dei flussi di cassa $\alpha \in R^{n+1}$:

$$\alpha = \{ \alpha_0, \alpha_1, \ldots \alpha_n \}$$

di un dato progetto, per il quale il generico elemento α_k si intende esigibile o disponibile all'epoca $t_k = k$, $0 \leq k \leq n$, con $t_0 = 0$ origine dell'operazione, e $t_n = n$ termine della stessa.

Assumendo come definizione di progetto quella data in |31|, imporremo ai flussi di cassa le seguenti condizioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_0 < 0; \\ \alpha_n \neq 0; \\ \alpha_i > 0, \text{ per almeno un } i: 1 \leq i \leq n; \\ \alpha_k = 0 \quad \forall\ k > n. \end{cases}$$

I problemi sopradetti sono riconducibili al problema della

scelta degli investimenti sia per l'uso del criterio del Tasso Interno di Rendimento (T.I.R.), nel qual caso il vettore α è propriamente il vettore dei flussi di cassa del progetto, e gli eventuali zeri della D.P.V. $F(r;\alpha)=0$ sono detti i tassi interni di rendimento del progetto stesso, sia per la definizione di preferibilità ed equivalenza finanziaria di progetti (vedi |63|,|64|,|81|,|83|) nel qual caso, dati due progetti P_a e P_b, caratterizzati rispettivamente dai vettori dei flussi di cassa:

$a = \{a_0, a_1, .., a_n\}$ e $b = \{b_0, b_1, .., b_n\}$

posto $\alpha = a-b = \{a_0-b_0, a_1-b_1, .., a_n-b_n\} = \{\alpha_0, \alpha_1, .., \alpha_n\}$, l'analisi della preferibilità di P_a rispetto a P_b e viceversa oppure la loro equivalenza, ad un dato tasso d'interesse r_0, è effettuata basandosi sul segno e sugli zeri della D.P.V. $F(r_0;\alpha)$.

Per quanto riguarda esistenza ed unicità del T.I.R. di un dato progetto, molti sono gli Autori che dal 1958 ad oggi hanno fornito sempre più generali condizioni sufficienti per l'esistenza e l'unicità di esso. Di queste, ampliando quanto fatto in |47|, daremo una rassegna, raggruppandole in filoni di appartenenza basati sui criteri e sulle procedure usate e fornendo, in base a queste, in molti casi, le relazioni di dominanza esistenti mediante argomentazioni più semplici delle originali.

Per quanto concerne l'utilizzazione del T.I.R. come valido criterio per la scelta d'investimenti, essendo noto che la sua unicità non basta per assicurare una scelta corretta, non entreremo in questa nota nel merito di tale problema, limitandoci a segnalare al lettore interessato gli articoli ai numeri |1|,|5|,|6|,|8|,|9|,|13|,|14|,|15|,|16|,|17|,|18|,|19|,|22|,|24|, |26|,|27|,|37|,|38|,|39|,|48|,|49|,|56|,|77|,|81|,|83|,|88|, della bibliografia, sia per questo problema che per le modifiche proposte al criterio medesimo. Sempre per limitare l'argomento

della trattazione, non esamineremo quel filone della letteratura che si occupa di unicità del T.I.R. mediante il cosiddetto "Teorema del Troncamento", per il quale il lettore interessato potrà vedere ai numeri |2|,|3|,|23|,|25|,|29|,|32|,|33|,|46|, |50|,|53|,|72|,|76|,|87| della Bibliografia, o mediante altre procedure (|30|,|34|,|51|,|73|,|74|,|79|,|80|,|86|).

Assegnato il vettore dei flussi di cassa α e la corrispondente D.P.V. $F(r;\alpha)$, i problemi suddetti sono riconducibili allo studio del segno ed alla ricerca del numero delle radici dell'equazione:

$$(1)\qquad \begin{cases} F(r;\alpha) = \sum_{k:0}^{n} \alpha_k \cdot (1+r)^{-k} = 0 \\ -1<r<\infty \end{cases}$$

Ponendo nella (1) $(1+r)^{-1} = x$ otteniamo la:

$$(3)\qquad \begin{cases} F^*(x;\alpha) = \sum_{k:0}^{n} \alpha_k \cdot x^k \\ 0<x<\infty \end{cases}$$

per la quale, ancor più precisamente:

$-1<r<0 \iff 1<x<\infty$ e

$0<r<\infty \iff 0<x<1$.

E' utile infine notare che:

(4) $F^*(0;\alpha) = \lim_{r\to\infty} F(r;\alpha) = \alpha_0$;

(5) $F^*(1;\alpha) = F(0;\alpha) = \sum_{k:0}^{n} \alpha_k$;

(6) $\lim_{x\to\infty} F^*(x;\alpha) = \lim_{r\to -1^+} F(r;\alpha) = \infty$, con il segno di α_n.

Viste le (2), (4), (5) e (6), se abbiamo $\alpha_n<0$ e $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k > 0$, è assicurata l'esistenza del T.I.R. per $r \in]-1;\infty[$, ma è impossibile la sua unicità; è ancora assicurata l'esistenza se $\alpha_n>0$ sia per $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k > 0$ che per $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k < 0$, ma in questi due casi non è garantita l'unicità; non è infine garantita l'esistenza nel caso $\alpha_n<0$ e $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k<0$, per il quale, se vi fosse un T.I.R. questo può essere unico solo se è una radice non semplice di molteplicità pari per la $F(r;\alpha) = 0$.

2. Le prime condizioni di unicità

Nel 1958, in |69|, Pitchford e Hagger, assicurata l'esistenza di almeno un T.I.R. mediante le condizioni:

(7) $\alpha_0<0; \quad \alpha_n>0;$

davano una prima condizione sufficiente per la sua unicità in $r \in]-1;\infty[$ mediante la:

(8) $\alpha_k>0 \quad \forall\ k: 1\leq k\leq n,$

condizione che garantisce ad $F^*(x;\alpha)$ di essere funzione strettamente monotòna crescente in $0<x<\infty$, ma che più facilmente si giustifica mediante la Regola dei Segni di Cartesio (vedi |75|, pag. 496).

Da notare come, nella condizione di Pitchford e Hagger, venga trascurato il valore di $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k$, somma, o cumulata, dei flussi di cassa non scontati, quantità che sarà spesso usata da altri Autori. Viste le (7) e (8), detto $\bar{r}$ il T.I.R. unico, se $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k>0 \Rightarrow \bar{r}\in]0;\infty[$; se $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k<0 \Rightarrow \bar{r}\in]-1; 0[$, se, infine, si ha che $\sum_{k:0}^{n} \alpha_k= 0 \Rightarrow \bar{r} = 0$. La condizione (8) può benissimo essere estesa alla:

(8*) $\alpha_k\geq 0 \quad \forall\ k: 1\leq k\leq n,$

purchè l'uguaglianza non valga $\forall\ k: 1\leq k\leq n$.

Nel 1959, in |78|, C.S.Soper, sempre nell'ambito $-1<r<\infty$, assicurata l'esistenza mediante le (7), e supposto di aver determinato una radice $\bar{x}$ della $F^*(x,\alpha)=0$, impone al quoziente $f(x)= F^*(x;\alpha):(x-\bar{x})$ di non avere radici $x>0$ e questo accade, per la regola di Newton (|84|pag. 97), se $f(0)$ e le prime n derivate di $f(x)$ in zero hanno lo stesso segno, ovvero se:

$$(9) \qquad \sum_{k:0}^{i} \alpha_k \cdot \bar{x}^k < 0 \qquad \forall\ i : 0\leq i\leq n-1.$$

Dopo aver notato che quella di Soper è l'unica condizione di unicità che coinvolga direttamente il T.I.R. trovato $\bar{r} = \frac{1}{\bar{x}} - 1$, è bene notare come la condizione originale (9) possa essere estesa alla:

$$(9^*) \qquad \sum_{k:0}^{i} \alpha_k \cdot \bar{x}^k \leq 0 \qquad \forall\ i : 1\leq i\leq n-1;\ \alpha_0<0;$$

purchè l'uguaglianza non sia valida $\forall\ i : 1\leq i\leq n-1$, come si può vedere in |31|, e che un'altra condizione di unicità del T.I.R. può essere formulata, mediante la Regola dei Segni di Cartesio applicata al quoziente $f(x)$, mediante la:

$$\sum_{k:0}^{i} \alpha_{n-k} \bar{x}^{i-k} \geq 0 \qquad \forall\ i : 0\leq i\leq n-1.$$

Anche se criticata per la ristretta classe dei progetti a cui assicura l'unicità del T.I.R., la condizione elaborata da Soper, vista alla luce del significato economico datole da Bernhard ed altri Autori (vedi |5|,|6|,|7|,|9|,|10|,|13|,|31|, |41|,|83|), individua, anche nella sua generalizzazione data dalla (9*), quella classe di progetti per i quali il criterio del Tasso Interno di Rendimento fornisce un criterio di valutazione significativo economicamente e privo di ambiguità.

Sostenendo la possibilità di difficoltà nel calcolo del T.I.R. $\bar{r}$ e l'influenza che un valore approssimato ma non esatto potrebbe avere nella verifica delle (9), in una nota del 1965, |44|, S.Kaplan propone l'uso del Teorema di Sturm per avere il numero esatto delle radici della (3).

La differenza tra il numero delle variazioni della successione di Sturm (vedi |75|,|84|,|85|) nello zero ed all'infinito, ci fornisce esattamente il numero delle radici $0 \leq x < \infty$ della (3), contando per una sola ogni eventuale radice multipla. Indipendentemente dalla complessità dei calcoli che essa richiede, pur sempre affidabili ad un elaboratore (|36|,|45|,|55|), questa è forse la condizione che, meno di tutte, è collegabile ai flussi di cassa del progetto, ed anche se, mediante essa, avessimo garantita l'unicità del T.I.R. per un dato progetto, potrebbero pur sempre sorgere problemi per un uso corretto del criterio del T.I.R (vedi |7|).

Ricorrendo invece al Teorema di Budan (|75|) W.Jean, nel 1968, in |42|, determina alcune classi di progetti per le quali sia garantita l'unicità del T.I.R..Anticipando quello che faranno molti altri Autori in seguito, ed accusando di opportunismo matematico gli Autori precedenti, egli limita la ricerca del T.I.R. ai soli valori $0 < r < \infty$. Assicurata l'esistenza di almeno una radice della (3) nell'intervallo $0 < x < 1$ mediante le:

$$(10) \qquad \alpha_0 < 0 \; ; \quad \sum_{k:0}^{n} \alpha_k > 0 ;$$

applicando il Teorema di Budan nello stesso intervallo, egli assicura l'unicità del T.I.R. per quei progetti per i quali:

$$(11) \quad \begin{cases} \alpha_k < 0 & \forall\, k:\ 0 \leq k \leq m \quad \text{e} \\ \alpha_k > 0 & \forall\, k:\ m+1 \leq k \leq n \qquad 1 \leq m \leq n-1 \end{cases}$$

ed involontariamente, dato che l'Autore in |42| esprime in forma dubitativa un'esistenza che invece è assicurata dalle (10), anche per i progetti per i quali:

$$(12) \quad \begin{cases} \alpha_0 < 0 ; \\ \alpha_k > 0 & \forall\, k:\ 1 \leq k \leq m ; \\ \alpha_k < 0 & \forall\, k:\ m+1 \leq k \leq n ; \qquad 1 \leq m \leq n-1. \end{cases}$$

Dopo la critica di J.Hirshleifer, |40|, W.Jean in |43| considera anche i progetti per i quali valgano le:

$$\alpha_0 < 0 ; \quad \sum_{k:0}^{n} \alpha_k < 0 ;$$

ma questa volta, usando le stesse procedure, non determina alcuna classe per la quale sia assicurata l'unicità del T.I.R.. Una indagine identica a |42| e |43| si può trovare in |28|.

Un'applicazione del Teorema di Budan all'intervallo $0 < x < \infty$, poi, è facile vedere che garantirebbe l'unicità del T.I.R. solo alla classe dei progetti (11), ma per questi, avendo la sequenza dei cash-flows una sola variazione, come detto in |31|, basta applicare la Regola dei Segni di Cartesio.

3. Altre condizioni

Utilizzando per gli investimenti la definizione data in |49| e |81|, A.Trovato in |82|, nel 1972, dimostra l'unicità del T.I.R. positivo quando si tratti di progetti di investimento "in senso stretto", ovvero di investimenti per i quali, vedi anche |83|, i costi precedono i ricavi, condizione facilmente dimostrabile ove si consideri che per questi progetti il vettore dei cash-flows presenta una sola variazione (vedi anche |31|).

Per gli investimenti "in senso lato", ovvero per quei progetti per i quali la scadenza media dei costi preceda,a qual-

siasi tasso, la scadenza media dei ricavi, l'Autore dimostra che l'unicità del T.I.R. positivo è garantita quando la scadenza media aritmetica dei costi precede la scadenza del primo ricavo.

Alterando l'ordine cronologico della trattazione, è bene dare ora notizia della condizione, cosiddetta "flessibile", data da C.De Faro e L.Soares in |21| nel 1978, vista la sua estraneità procedurale con il filone che si svilupperà in seguito. I due Autori impongono, sotto le condizioni (10), alla (3) di avere derivata strettamente negativa ogniqualvolta la (3) stessa assuma valori maggiori o uguali a zero, e dimostrano che questo è possibile se si riesce a determinare almeno un intero k: $1 \leq k \leq n$, tale che:

$$k\cdot(k-1)M_k + (n-k)\cdot(n-k+1)m_k \leq 2k\cdot|a_0|$$

con M_k ed m_k definiti rispettivamente dalle:

$$M_k = \max \{0; \max_{1\leq i\leq k-1} a_i\} \text{ e}$$

$$m_K = -\min \{0; \min_{k+1\leq i\leq n} a_i\}.$$

Simile a questa nella procedura è un'altra condizione che i due Autori ottengono, sempre in |21|, per garantire la stretta convessità della (3) e poter così adoperare il metodo di Newton-Raphson per la determinazione dell'unica radice.

4. Il Teorema di Vincent

Con la nota del 1972, |52|, di Norstrøm, inizia quel filone della letteratura che, spesso senza occuparsi dell'uso corretto del T.I.R. come criterio di scelta tra investimenti, nè del suo significato economico, si occupa solo della ricerca di condizioni sufficienti sempre più ampie per la sua unicità. Lo strumento usato dagli autori che seguiranno, anche se ad esso, spesso, non viene fatto esplicito riferimento, è il Teorema di Vincent, e più precisamente il metodo di indagine che detto Teorema suggerisce (vedi |85| pag 127 e segg.), anche se risultati simili si possono ottenere mediante procedure diverse.

E' quindi opportuno, a questo punto della trattazione, descrivere tale Teorema e le sue più utili conseguenze.

Il Teorema di Vincent afferma:

- Siano dati dei valori interi : $c_i \in Z$; se un'equazione ha solo radici semplici, operando sulla sua incognita una serie di sostituzioni del tipo:

$$(13) \qquad x_{i+1} = c_i + \frac{1}{x_i}, \text{ con } x_0 = x,$$

dopo un numero finito di queste sostituzioni, indipendente dalla scelta dei valori interi c_i, si perviene ad una equazione trasformata i cui coefficienti presentano al più una variazione.

In concreto, il metodo di indagine per la ricerca delle soluzioni positive della (3) che possiamo dedurre dal Teorema è il seguente:

nella $F^*(x;\alpha)= 0$ operiamo anzitutto le sostituzioni:

$\Omega_0 : x = 1+x_1$, e

$\Omega_1 : x = \frac{1}{1+x_1}$.

Se l'equazione ottenuta mediante la prima sostituzione presenta nessuna o una sola variazione nei suoi coefficienti della nuova incognita x_1, allora per la $F^*(x;\alpha)=0$ ci saranno nessuna o una sola soluzione $\bar{x}$: $1<\bar{x}<\infty$; similmente, se i coefficienti

dell'equazione ottenuta mediante la seconda trasformazione presentano nessuna o una sola variazione, ci sarà un numero uguale di soluzioni della $F^*(x;\alpha)=0$ nell'intervallo : $0<x<1$.

Se una trasformazione conduce ad una equazione con un numero di variazioni maggiore o uguale a due, per la Regola dei Segni di Cartesio, non siamo ancora in grado di formulare una risposta. In questo caso, come suggerito anche in |47|, si prosegue componendo, mediante uno schema ripetitivo ad albero, in tutti i possibili modi, due e più trasformazioni del tipo Ω_0 e Ω_1, combinazioni che sono esprimibili anche nella forma delle (13).

Componendo, ad esempio, due trasformazioni, avremo le:

$$\Omega_{11} : x = \frac{1+x_2}{2+x_2}$$

$$\Omega_{01} : x = \frac{1}{2+x_2}$$

$$\Omega_{10} : x = \frac{2+x_2}{1+x_2} \qquad \text{e}$$

$$\Omega_{00} : x = 2+x_2,$$

mediante le quali, per $0<x_2<\infty$, in base al numero di variazioni nei coefficienti delle trasformate, potremo ricavare informazioni sulla presenza di radici della (3) negli intervalli $\frac{1}{2}<x<1$; $0<x<\frac{1}{2}$; $1<x<2$ e $2<x<\infty$ rispettivamente. Se l'equazione (3) non ha radici multiple, dopo un numero finito di tali composizioni, i coefficienti delle trasformate presenteranno nessuna o una sola variazione.

La laboriosità dei calcoli necessari ad eseguire le varie trasformazioni e le loro composizioni, è fortemente diminuita mediante il calcolo di particolari tabelle, la cui costruzione richiede esclusivamente addizioni.

Se la trasformazione è la Ω_0, la prima riga della tabella è

formata dai coefficienti dell'equazione, in ordine di indice decrescente : $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_1, \alpha_0$.

Il primo elemento della seconda e di ogni altra riga successiva è α_n, ed ogni elemento della tabella è dato dalla somma dei due elementi che gli stanno, rispettivamente, a sinistra e sopra nella tabella. Se, con notazione matriciale, denotiamo con $a_{i,j}$ l'elemento della tabella che si trova sulla i-esima riga e j-esima colonna, quanto precedentemente detto può essere formalizzato mediante la:

$$(14) \qquad \begin{cases} a_{0,j} = \alpha_{n-j}, & 0 \le j \le n; \\ a_{i,0} = \alpha_n, & 0 \le i \le n+1; \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}; & 1 \le i \le n;\ 1 \le j \le n. \end{cases}$$

I coefficienti dell'equazione trasformata sono gli elementi della diagonale: $\{ a_{n+1,0}; a_{n,1}; a_{n-1,2}; \ldots; a_{2,n-1}; a_{1,n} \}$, ovvero gli elementi $a_{i,j}$ tali che: $i+j = n+1$, $1 \le i \le n+1$, $0 \le j \le n$.

Similmente per una trasformazione Ω_1, con l'inversione, però, della prima riga, ovvero si dispongono i coefficienti dell'equazione in ordine di indice crescente: $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$.

In questo caso, la formalizzazione del procedimento è data dalla

$$(15) \qquad \begin{cases} a_{0,j} = \alpha_j, & 0 \le j \le n; \\ a_{i,0} = \alpha_0, & 0 \le i \le n+1; \\ a_{i,j} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}, & 1 \le i \le n,\ 1 \le j \le n. \end{cases}$$

Descrizioni del procedimento si possono trovare anche in |18|, |20|, |31|, |47|, |63|, |64|, |65|, |71|, |85|.

Da rilevare anche un'interessante relazione tra gli elementi di

una tabella ed i termini della prima riga della stessa, vedi |10|,|12| e |20|, ovvero si ha che:

$$a_{i,j} = \sum_{k:0}^{j} \binom{i+j-k-1}{j-k} \alpha_k \ , \quad i \geq 1, \ j \geq 1 \ .$$

Per gli elementi della diagonale finale, dovendo per essi, come già detto, valere la relazione i+j = n+1, avremo anche

$$a_{i,n+1-i} = \sum_{k:0}^{n+1-i} \binom{n-k}{n+1-i-k} \cdot \alpha_k = \sum_{k:0}^{n+1-i} \binom{n-k}{i-1} \cdot \alpha_k, \quad 1 \leq i \leq n+1.$$

Ovviamente il numero delle variazioni presenti nella diagonale finale è una limitazione superiore al numero delle radici, ed esistono varie proprietà che consentono un risparmio di calcoli per la determinazione di questa limitazione. Come si può vedere anche in |12|,|20|,|47|,|63|,|64|,|65|, esse sono le seguenti:

P.1) Ogni riga ha un numero di variazioni minore o uguale a quello della precedente;

P.2) Non occorre calcolare tutti gli elementi di una riga, basta arrestarsi a quello che appartiene alla diagonale;

P.3) Se gli elementi della i-esima riga, da $a_{i,0}$ fino ad $a_{i,n+1-i}$ non presentano variazioni, allora il numero delle variazioni degli elementi della diagonale coincide con quello della sequenza: $\{a_{i,n+1-i}; a_{i-1,n+2-i}; \ldots; a_{2,n-1}; a_{1,n}\}$;

P.4) Se gli elementi della i-esima riga, da $a_{i,0}$ fino ad $a_{i,n+1-i}$ presentano una sola variazione, e gli elementi già calcolati della diagonale $(a_{i-1,n+2-i}, \ldots, a_{1,n})$ hanno lo stesso segno di $a_{i,n+1-i}$, anche gli elementi della diagonale presenteranno una sola variazione.

5. *Le condizioni di unicità deducibili dal Teorema di Vincent*

Alla luce delle proprietà esposte, è facilmente dimostrabile la condizione formulata da C.Norstrøm in |52| nel 1972, che consiste nell'imporre che la seconda riga della tabella della trasformazione Ω_1, operata sulla (3) presenti una sola variazione. Questo in quanto l'Autore limita la sua ricerca a T.I.R. positivi, ovvero a soluzioni x: $0<x<1$ per la (3).

Definite le cumulate non scontate dei flussi di cassa come:

$$(16) \qquad A_k = \sum_{j:0}^{k} \alpha_j \ ,$$

avendosi $A_0 = \alpha_0$, il T.I.R. è unico e positivo se $\exists\, m$, $0 \leq m < n$:

$$(17) \qquad \begin{cases} A_k \leq 0 & \text{per } 0 \leq k \leq m; \\ A_k \geq 0 & \text{per } m+1 \leq k \leq n-1; \\ A_n > 0. \end{cases}$$

La condizione $A_n > 0$ discende dall'imporre $A_n \neq 0$, per escludere che $\bar{x}=1$ e quindi $\bar{r}=0$ siano radici della (3) e della (1) rispettivamente. Visto che la ricerca è rivolta solo a T.I.R. positivi, la condizione (17) sarà confrontata solo con quella di Jean. E' ovvio che, sotto la condizione (10) sia i progetti (11) che i progetti (12) soddisfano anche alle (17). Per questi ultimi, però, è bene notare che l'essere $\alpha_0 < 0$ e $\alpha_n < 0$, comporta, nell'ambito più generale $-1<r<\infty$, per la (10), l'esistenza di due T.I.R. uno positivo e uno negativo. Come detto in |9|,|18| e |19|, non è possibile stabilire relazioni di dominanza tra la condizione di Norstrøm e quella di Soper.

Una generalizzazione della condizione di Norstrøm, però per flussi di cassa nel continuo e non nel discreto, è stata data nel 1975, in |57|, da L.Peccati, usando la "funzione cumulativa dei margini", S(t), definita, continua a destra ed a variazione limitata in ogni intervallo del semiasse positivo t, mediante la quale è garantita l'unicità del T.I.R. positivo sotto le condizioni:

a) $S(0) < 0$;

b) $\lim_{t\to\infty} S(t) > 0$;

c) $\exists\, \bar{t} \in]0;+\infty[\;:\; S(t) < 0, \forall\, t < \bar{t}$ e $S(t) > 0, \forall\, t > \bar{t}$;

d) $\lim_{t\to\infty} e^{-\delta t} S(t) = 0 \;,\; \forall\, \delta > 0$;

e) $\int_0^t t \cdot e^{-\delta t} S(t)\, dt$ esiste $\forall\, t \in]0;+\infty[$.

Ammettendo che le (16) possano cambiare di segno anche più di una volta, detti $T_1, T_2, \ldots, T_m$ gli istanti in cui avvengono le variazioni, D.Aucamp e W.Eckardt in |4|, nel 1976, generalizzano la condizione di Norstrøm, sviluppando, come condizione sufficiente per l'esistenza di un T.I.R. ancora positivo, la seguente:

$$(18)\quad \begin{cases} m = 2k+1 \;;\; k \in N^*; \\ A_n > 0 \;; \\ \sum_{i:0}^{T_1-1} |A_i| \geq \sum_{i:T_1}^{T_m-1} A_i^+ \;; \end{cases}$$

dove con A_i^+ sono indicate le sole cumulate di segno positivo.

La forma (18) in cui qui è stata espressa la condizione di Aucamp ed Eckardt non è quella originale, |4|, dove si suppone che il progetto abbia vita illimitata (A_n è sostituito da $A_\infty = \sum_{j:0}^{\infty} a_j$), situazione che per le (2) esula dalla nostra trattazione.

A causa del numero dispari di variazioni nella sequenza delle cumulate, da $A_0 < 0$ segue $A_n > 0$, strettamente, al solito, per escludere il T.I.R. $\bar{r}=0$; la terza delle condizioni (18) significa semplicemente che, formata la tabella della trasformazione Ω_1 per la (3), gli elementi iniziali negativi della seconda riga (le cumulate di Norstrøm) hanno, in valore assoluto, una somma maggiore della somma di tutte le cumulate positive precedenti l'ultima variazione di segno, di modo che la terza riga della tabella presenterà al più una variazione, e dato che $A_0 < 0$ e $A_n > 0$, per la proprietà P.4, la diagonale finale avrà una sola variazione. E' ovvio quindi che questa condizione è più generale di quella di Norstrøm, la quale corrisponde al caso m=1.

L'imporre direttamente che la terza riga della tabella della trasformazione Ω_1 presenti una sola variazione, è la condizione che De Faro, in |20|, presenta nel 1978, sotto il nome di "criterio della ξ-successione". Questa condizione, come dimostrato da Bernhard in |11|, domina quella cosiddetta "flessibile" ed ovviamente domina la (18), ed è a sua volta dominata da quella che, sempre in |20|, De Faro ottiene imponendo, ancor più direttamente, che la diagonale finale della tabella della trasformazione Ω_1 abbia una sola variazione di segno. Mantenendo la simbologia degli originali avremo, per la " ξ-successione":

$$\begin{cases} \text{la sequenza } \{A_k^2\},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ presenti una sola variazione;} \\ A_n > 0 \;; \end{cases}$$

e per la diagonale finale:

$$(19)\qquad \begin{cases} \{ A_i^{n+1-i} \}\ ,\ 0\leqslant i\leqslant n \ \text{ presenti una sola variazione;} \\ A_n = A_n^1 > 0 \end{cases}$$

avendo definito gli A_k^h nel modo seguente:

$$(20)\qquad \begin{cases} A_0^h = \alpha_0 \quad ,\ 1\leqslant h\leqslant n+1\ ; \\ A_k^1 = \sum_{i:0}^{k} \alpha_k \ ,\ 0\leqslant k\leqslant n\ ; \\ A_k^h = A_{k-1}^h + A_k^{h-1} \ ,\ 1<h\leqslant n;\ 1\leqslant k\leqslant n. \end{cases}$$

La formalizzazione (20) coincide con la (15), basta osservare che $a_{i,j} = A_j^i$.

Sempre in |20| De Faro, contemporaneamente a G.Olivieri in |54| e A.Pistoia in |63|, estendono l'uso del procedimento anche alla ricerca di eventuali T.I.R. $r \in]-1;\ 0[$. I risultati che essi ottengono possono essere formalizzati, come condizione sufficiente per l'unicità del T.I.R. della (1) in $]-1;\infty[$, usando le notazioni (14) e (15), nel seguente modo:

date le sequenze:

$$(21)\qquad S^0 : \{a_{n+1-k,k}\}\ ,\ 0\leqslant k\leqslant n,$$

con gli $a_{i,j}$ definiti dalle (14) e la:

$$(22)\qquad S^1 : \{a_{n+1-k,k}\}\ ,\ 0\leqslant k\leqslant n,$$

con gli $a_{i,j}$ definiti dalle (15), il progetto avente per D.P.V. la (1), sotto le condizioni:

$$\alpha_0 < 0,\ \alpha_n > 0,\ a_{1,n} \neq 0,$$

ammette un T.I.R. unico in $]-1;\infty[$ se:

le sequenze (21) e (22) presentano rispettivamente una e zero variazioni (ed il T.I.R. $\bar{r} \in]-1;\ 0[$) oppure presentano

rispettivamente zero ed una variazione (nel qual caso il T.I.R. $\bar{r} \in]\ 0;\ +\infty[$).

Considereremo nel seguito l'ipotesi $a_{1,n}=0$.

Lo spunto a De Faro per |20| è stato fornito da un lavoro di J. Hammond, |35|, del 1974, nel quale l'Autore, considerando flussi di cassa nel continuo, dimostra come una limitazione superiore al numero delle radici della (1) in $]0;\infty[$ sia fornita dal numero delle variazioni di segno della funzione del tempo t:

$$G_n(t) = \int_0^t \int_0^{q_1} \cdots \int_0^{q_n} f(q_n)\ dq_n\ dq_{n-1} \cdots dq_1 = \int_0^t G_{n-1}(q)dq$$

dove f(t) rappresenta il "flusso di cassa" e:

$$G_1(t) = \int_0^t \int_0^q f(q)\ dq,$$

potendosi dimostrare che la D.P.V.:

$$P(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \cdot f(t)dt, \qquad \delta = \log(1+r),$$

cambia di segno al massimo tante volte quante $G_n(t)$. Opportunamente ricondotta al caso discreto, $G_n(t)$ non è altro che la "cumulazione" iterata n+1 volte, dei flussi di cassa del progetto, e quindi questa condizione di J.Hammond consiste nell'ampliare la tabella della trasformazione Ω_1 , aggiungendo quante righe si vogliono dopo l'ultima, sempre generando gli elementi con le regole date dalla (15).

Il numero delle radici della D.P.V. $r \in]\ 0;\infty[$ non supera il numero delle variazioni in una qualunque riga di questa tabella "ampliata".

Proseguendo quanto fatto in |35|, ed in base ai risultati pubblicati da J.W.Pratt nel 1979 in |70|, sempre nel 1979, in

|71|, J.Hammond e J.W.Pratt formulano delle condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. positivo nel caso di flussi di cassa nel discreto, in base ad altre proprietà, molto utili dal punto di vista del calcolo pratico e più ampie delle P.1),.., P.4), atte a limitare superiormente il numero degli zeri della (3) appartenenti all'intervallo [0;1]. Anche se i risultati esposti da J.W.Pratt in |70| consentono una analisi dei T.I.R. nell'ambito più generale $-1<r<\infty$, i risultati riportati in |71| riguardano solo T.I.R. positivi. E' comunque semplice l'estensione ai T.I.R.: $-1<r<\infty$.

Le proprietà sopramenzionate sono le seguenti:

P.5.) Formata la tabella della trasformazione Ω_1, operata sulla (3) completando le righe oltre l'elemento della diagonale, il numero degli zeri positivi della D.P.V. (1) non supera il numero delle variazioni presenti negli elementi che stanno nell'ultima riga e nell'ultima colonna;

P.6) La tabella può essere ampliata aggiungendo quante colonne si vogliono, sempre calcolando gli elementi in base alle (15), e ponendo in esse $a_{0,i} = 0$, $\forall\ i>n$. La proprietà P.5) vale anche per queste tabelle.

P.7) Considerando le variazioni di segno negli elementi che si trovano su di un cammino che parta da un qualunque elemento nella prima colonna e termini all'ultimo elemento della seconda riga (quella delle cumulate), il loro numero è ancora una limitazione al numero delle radici positive della (1). (I cammini più utili, in vista di un risparmio nel numero dei calcoli sono quelli formati da spostamenti orizzontali - da sinistra a destra – e diagonali - dal basso verso l'alto-).

P.8) Formate le prime tre righe della tabella, anche con un numero di colonne p>n, se gli ultimi elementi delle tre righe: $a_{1,p}$, $a_{2,p}$ e $a_{3,p}$ sono tali che:

$a_{1,p}\cdot a_{2,p}<0$ e

$2\cdot a_{1,p}\cdot a_{3,p} \geq a_{2,p}\cdot(a_{1,p}+a_{2,p})$,

il numero delle variazioni ottenuto mediante la P.5) può essere diminuito di 2.

P.9) Considerando percorsi come nella P.7), se da un percorso ad un altro vi è un decremento di variazioni, questo è sempre per un numero pari. Incontrando in un percorso nessuna o una sola variazione, otteniamo quindi delle limitazioni esatte. Questo non è però vero se $a_{1,n} = \sum_{k:0}^{n} a_k = 0$, cioè se la cumulata dei flussi di cassa è nulla; in questo caso, $r=0$ è T.I.R. del progetto, e le variazioni, da un cammino ad un altro successivo, possono diminuire anche di un numero dispari, per cui non è detto che, avendo in un cammino una sola variazione, questa fornisca una limitazione esatta.

6. *Le condizioni di R.Bernhard e di A.Pistoia*

In ritardo rispetto a De Faro, anche R.Bernhard presenta, in |10|, una sua condizione sufficiente per l'unicità del T.I.R. positivo, definendo le quantità:

$$B_t = \sum_{j:0}^{t} \binom{n-j}{t-j} \cdot a_j \quad , \quad 0\leq t\leq n,$$

ed imponendo che esista almeno un m: $0\leq m\leq n$, per il quale:

$$(23)\quad \begin{cases} B_0<0\ ; \\ B_t\leq 0\ , \ \forall\, t\ :\ 1\leq t\leq m\ ; \\ B_t\geq 0\ , \ \forall\, t\ :\ m+1\leq t\leq n-1\ ; \\ B_n>0\ . \end{cases}$$

Lo stesso Bernhard dimostra in |10| che:

$\sum_{j:0}^{n} \alpha_j (1+r)^{n-j} = \sum_{t:0}^{n} B_t \cdot r^{n-t}$, dando così una immediata interpretazione, in base alla Regola di Cartesio, della sua condizione: se la sequenza dei B_t presenta una sola variazione, ci sarà una sola soluzione $r>0$. Ma, ponendo al solito $(1+r)^{-1} = x$, avremo anche che:

$(1+r)^{-n} \cdot \sum_{t:0}^{n} B_t \cdot r^{n-t} = (1+r)^{-n} \cdot \sum_{j:0}^{n} \alpha_j (1+r)^{n-j} = \sum_{j:0}^{n} \alpha_j (1+r)^{-j} =$
$= \sum_{j:0}^{n} \alpha_j x^j$, ovvero i B_t altro non sono se non i coefficienti che si ottengono operando sulla (3) una trasformazione del tipo Ω_1, ed ovviamente coincidono con la (19) di De Faro, nonchè con le analoghe condizioni di G.Olivieri e A.Pistoia (|54| e |63|).

Questa coincidenza tra la condizione (23) e la (19) di De Faro viene riconosciuta dallo stesso Bernhard in |12|, dove, applicando il Teorema di Vincent non alla (3) ma alla:

$$\sum_{t:0}^{n} B_t \cdot r^{n-t} = 0,$$

operando sia una trasformazione del tipo Ω_1, che una Ω_0, fornisce delle condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. positivo che possono essere formalizzate nel seguente modo: se:

$$\begin{cases} B_0 < 0 ; \\ \sum_{t:0}^{s} B_t \leq 0 \ ; \ \forall s: 1 \leq s \leq p-1, \ (1 \leq p \leq n-1); \\ \sum_{t:0}^{p} B_t > 0 \ ; \\ B_t \geq 0 \ ; \quad \forall t: p+1 \leq t \leq n-1; \\ B_n > 0 \ ; \end{cases}$$

allora il T.I.R. è unico e maggiore di uno; se:

$$\begin{cases} B_n > 0 ; \\ \sum_{t:0}^{s} B_{n-t} \geq 0, \ \forall s: 1 \leq s \leq p-1, \ (1 \leq p \leq n-1); \\ \sum_{t:0}^{p} B_{n-t} < 0 ; \\ B_{n-t} \leq 0, \quad \forall t: p+1 \leq t \leq n-1; \\ B_0 < 0 ; \end{cases}$$

allora il T.I.R. è unico e compreso fra zero e uno. E' facile vedere il legame tra queste condizioni e la proprietà P.4).

Le ultime e più ampie condizioni sufficienti per l'unicità del T.I.R. si trovano infine in |64| e |65|, del 1979, di A.Pistoia. Proseguendo gli studi svolti in |58|, |59|,|60|, |61|,|62|, |63|, dopo aver definito in |63| le:

$$\begin{cases} S_{k,q} = \sum_{h:0}^{k} S_{h,q-1}, & q \geq 1, \ 0 \leq k \leq n+1-q; \\ S_{k,0} = \alpha_k, & 0 \leq k \leq n \ ; \end{cases}$$

e le:

$$\begin{cases} S^*_{k,q} = \sum_{h:0}^{k} S^*_{h,q-1}, & q \geq 1, \ 0 \leq k \leq n+1-q; \\ S^*_{k,0} = \alpha_{n-k}, & 0 \leq k \leq n; \end{cases}$$

che altro non sono se non le tabelle relative, rispettivamente, ad una trasformazione Ω_1 ed una Ω_0, operate sulla (3) ovvero le (15) e (14) di questa nota (si osservi come, contrariamente alla notazione da noi usata, in $S_{k,q}$ e $S^*_{k,q}$, k è indice di colonna e q di riga) estende i risultati ottenuti in |63| introducendo le:

$$(24)\qquad \begin{cases} S^{p}_{k,q} = \sum_{h:0}^{k} S^{p}_{h,q-1} , & 0\leq k\leq n+1-q \ , \ p\in N \ ; \\ S^{p}_{k,0} = S^{p-1}_{n-k,k+1} , & \\ S^{0}_{n-k,k+1} = \alpha_{k} , & 0\leq k\leq n; \end{cases}$$

e le:

$$(25)\qquad \begin{cases} S^{p,m}_{k,q} = \sum_{h:0}^{k} S^{p,m}_{h,q-1} , & 0\leqslant k\leqslant n+1-q \ ; \ m,p\in N; \\ S^{p,m}_{k,0} = S^{p,m-1}_{k,n-k+1} \ ; & \\ S^{p,0}_{k,n-k+1} = S^{p}_{k,n-k+1}, & 0\leq k\leq n. \end{cases}$$

Avendosi $S^{p}_{k,q} = \sum_{h:0}^{k-1} S^{p}_{h,q-1} + S^{p}_{k,q-1} = S^{p}_{k-1,q} + S^{p}_{k,q-1}$ e $S^{p,m}_{k,q} = \sum_{h:0}^{k-1} S^{p,m}_{h,q-1} + S^{p,m}_{k,q-1} = S^{p,m}_{k-1,q} + S^{p,m}_{k,q-1}$, si può notare come le (24), per un indice p generico, altro non siano se non le tabelle del Teorema di Vincent che otteniamo iterando p volte, sulla (3), una trasformazione del tipo Ω_1; le (25), invece, corrispondono anch'esse a tabelle del Teorema di Vincent, ma sono ora quelle che otteniamo iterando inizialmente p volte sulla (3) una trasformazione del tipo Ω_1, e facendo seguire a queste m trasformazioni del tipo Ω_0.

Consideriamo allora le sequenze:

(26) $S^{p} : \{S^{p}_{n-k,k+1}\}$, $p\in N$, $0\leq k\leq n$ e

(27) $S^{p,m} : \{S^{p,m}_{n-k,k+1}\}$, $m,p\in N$, $0\leq k\leq n$.

Ponendo allora:

$$(28)\qquad \begin{cases} r = i_{1} \ ; & \\ i_{p-1} = \dfrac{1}{1+i_{p}} , & p\geqslant 2 \ ; \\ \nu_{0} = \dfrac{1}{1+i_{1}} \ ; & \\ \nu_{p-1} = \dfrac{1}{1+\nu_{p}} \ ; & \\ \lambda_{p} = \prod_{k:0}^{p-1} (\nu_{k})^{n} \ ; & \end{cases}$$

potremo scrivere la (3), rispettivamente mediante le (24), (25) e (28), come :

$$F(r;\alpha) = \lambda_{p} \cdot \sum_{k:0}^{n} S^{p}_{n-k,k+1} \cdot i_{p}^{k} \ , \qquad \text{e}$$

$$F(r;\alpha) = \lambda_{p} \cdot \sum_{k:0}^{n} S^{p,m}_{n-k,k+1} \cdot (i_{p}-m)^{k}$$

dalle quali A. Pistoia deduce, mediante le solite proprietà P.1),..,P.4), tra gli altri, i seguenti risultati:

(29) Il numero degli zeri della (1) che appartengono all'intervallo $i_{p}>0$ non supera il numero delle variazioni della sequenza (26); se in detta sequenza i termini non presentano variazioni, senza essere tutti nulli, dello stesso segno, nello stesso intervallo è la D.P.V. (1).

(30) Il numero degli zeri della (1) che appartengono all'intervallo $i_{p}>m$ non supera il numero delle variazioni della sequenza (27). Se in detta sequenza i termini non presentano variazioni, senza essere tutti nulli, dello stesso segno nello stesso intervallo è la D.P.V. (1).

Come in |63|, anche in |64| l'Autore estende l'uso del Teore-

ma di Vincent dallo studio del segno della D.P.V. (1) allo studio della sua monotonia e della sua convessità, costruendo le opportune tabelle relative, rispettivamente, ad $F'(r;\alpha)$ e $F''(r;\alpha)$. Per la costruzione di queste tabelle basta sostituire, nelle (14) e (15), al generico coefficiente α_k del polinomio, le espressioni $k\cdot\alpha_k$ e $k(k-1)\alpha_k$ rispettivamente.

In |65|, sempre del 1979, infine, mediante le:

$$\begin{cases} R^{p}_{k,q} = \sum_{h:0}^{k} R^{p}_{h,q-1} & , 0\leqslant k\leqslant n+1-q; \\ R^{p}_{k,0} = R^{p-1}_{k,n-k+1} & , 0\leqslant k\leqslant n; \\ R^{0}_{k,n-k+1} = \alpha_{n-k} & , 0\leqslant k\leqslant n; \end{cases}$$

e le:

$$\begin{cases} R^{p,m}_{k,q} = \sum_{h:0}^{k} R^{p,m}_{h,q-1} & , 0\leqslant k\leqslant n+1-q; \\ R^{p,m}_{k,0} = R^{p,m-1}_{n-k,k+1} & , 0\leqslant k\leqslant n; \\ R^{p,0}_{n-k,k+1} = R^{p}_{n-k,k+1} & , 0\leqslant k\leqslant n; \end{cases}$$

considera le sequenze:

(31) $R^{p} : \{R^{p}_{n-k,k+1}\}$; $p\in N$; $0\leqslant k\leqslant n$;

e

(32) $R^{p,m} : \{R^{p,m}_{n-k,k+1}\}$; $p,m\in N$; $0\leqslant k\leqslant n$;

che altro non sono se non i coefficienti del polinomio ottenuto iterando sulla (3), rispettivamente, p trasformazioni del tipo Ω_0, e p trasformazioni del tipo Ω_0 seguite da m del tipo Ω_1. Mediante i segni dei termini di queste sequenze otteniamo, al solito, una limitazione superiore al numero degli zeri della (3) in opportuni intervalli.

7. *La più generale condizione di unicità*

Il procedimento più generale di utilizzazione del Teorema di Vincent può essere formalizzato, partendo dalla

$$(3) \qquad \sum_{j:0}^{n} a_j \cdot x_0^j = 0,$$

nel seguente modo.

Osserviamo anzitutto che ogni composizione di quante si vogliono (in numero, ad esempio, di k) trasformazioni Ω_0 e/o Ω_1 può essere espressa nella forma:

$$x_0 = \frac{a+bx_k}{c+dx_k}$$

che noi identifichiamo con la:

$$(a,c;b,d) \approx \frac{a+bx}{c+dx} .$$

Avremo quindi che:

$$(33) \quad \begin{cases} x = x_0 \approx (0,1;1,0) ; \\ \Omega_0 : x_0 = 1+x_1 \approx (1,1;1,0) ; \\ \Omega_1 : x_0 = \dfrac{1}{1+x_1} \approx (1,1;0,1) \end{cases}$$

ed inoltre:

$$(34) \quad \begin{cases} \Omega_0\,[(a,c;b,d)] = (a+b,c+d;b,d) \\ \Omega_1\,[(a,c;b,d)] = (a+b,c+d;a,c). \end{cases}$$

Se, componendo un numero k di trasformazioni qualsivoglia, Ω_0 e/o Ω_1, abbiamo ottenuto la:

$$x_0 = \frac{a_k + b_k x_k}{c_k + d_k x_k} ,$$

calcolando i due limiti, per $x_k \to 0^+$ e per $x_k \to +\infty$, avremo l'intervallo:

$$(35) \qquad \frac{a_k}{c_k} < x_0 < \frac{b_k}{d_k} \text{ oppure } \frac{b_k}{d_k} < x_0 < \frac{a_k}{c_k} ,$$

a seconda che il numero delle trasformazioni Ω_1 operate sia pari o dispari.

Il numero delle radici della (3) contenute nell'intervallo definito dalle (35) non supera il numero delle variazioni di segno negli elementi della diagonale finale della tabella del Teorema di Vincent relativa alla composizione effettuata.

Detta $\{ a^{k-1}_{n+1,0} ; a^{k-1}_{n,1} ; \ldots ; a^{k-1}_{2,n-1} ; a^{k-1}_{1,n} \}$ la diagonale finale della tabella relativa alla composizione delle prime (k-1) trasformazioni, quanto detto in precedenza può essere formalizzato mediante le:

$$(14^*) \quad \begin{cases} a^k_{0,j} = a^{k-1}_{n+1-j,j} , & 0 \le j \le n ; \\ a^k_{i,0} = a^{k-1}_{n+1,0} , & 0 \le i \le n+1 ; \\ a^k_{i,j} = a^k_{i-1,j} + a^k_{i,j-1} , & 1 \le i \le n ; \ 1 \le j \le n ; \end{cases}$$

se la k-esima trasformazione operata è la Ω_0, e le

$$(15^*) \quad \begin{cases} a^k_{0,j} = a^{k-1}_{j+1,n-j} ; & 0 \le j \le n ; \\ a^k_{i,0} = a^{k-1}_{1,n} ; & 0 \le i \le n+1 ; \\ a^k_{i,j} = a^k_{i-1,j} + a^k_{i,j-1} ; & 1 \le i \le n , \ 1 \le j \le n ; \end{cases}$$

se la k-esima trasformazione operata è la Ω_1.

8. Un'applicazione

La formalizzazione data dalle (34) consente di precisare gli intervalli a cui si fa riferimento in |64| pag.13 R/4), nonchè in |65| pag.2 R/1), intervalli in cui valgono le limitazioni superiori al numero degli zeri della (3) fornite dalle sequenze (26),(27),(31) e (32).

Componendo p trasformazioni del tipo Ω_1, gli estremi dello intervallo (35) si ottengono risolvendo il sistema di equazioni alle differenze finite (vedi le (34)):

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + b_{p-1} \\ c_p = c_{p-1} + d_{p-1} \\ b_p = a_{p-1} \\ d_p = c_{p-1} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali, ottenute dalle (33):

$(a_0, c_0 ; b_0, d_0) = (0,1;1,0)$ e

$(a_1, c_1 ; b_1, d_1) = (1,1;0,1)$.

Tramite la soluzione dell'equazioni:

$a_p - a_{p-1} - a_{p-2} = 0$ e

$c_p - c_{p-1} - c_{p-2} = 0$

si perviene alla soluzione, data dalle:

$$(36)\quad \begin{cases} a_p = \dfrac{1}{2^p\cdot\sqrt{5}}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p\right] \\ c_p = \dfrac{1}{2^{p+1}\cdot\sqrt{5}}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^{p+1}-(1-\sqrt{5})^{p+1}\right] \\ b_p = \dfrac{1}{2^{p-1}\cdot\sqrt{5}}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^{p-1}-(1-\sqrt{5})^{p-1}\right] \\ d_p = \dfrac{1}{2^p\cdot\sqrt{5}}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p\right] \end{cases}$$

da cui otteniamo:

$$\frac{a_p}{c_p} = 2\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p}{(1+\sqrt{5})^{p+1}-(1-\sqrt{5})^{p+1}} \quad \text{e}$$

$$\frac{b_p}{d_p} = 2\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{p-1}-(1-\sqrt{5})^{p-1}}{(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p}, \quad p = 1,2,\ldots$$

Similmente,componendo inizialmente p trasformazioni del tipo Ω_1 seguite da m trasformazioni del tipo Ω_0, siamo condotti alla soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_{m+p} = a_{m-1+p} + b_{m-1+p} \\ c_{m+p} = c_{m-1+p} + d_{m-1+p} \\ b_{m+p} = b_{m-1+p} \\ d_{m+p} = d_{m-1+p} \end{cases}$$

con la condizione iniziale $(a_p,c_p;b_p,d_p)$ espressa dalle (36), che si trasforma in:

$$\begin{cases} b_{m+p} = b_p \\ d_{m+p} = d_p \\ a_{m+p} = a_{m-1+p} + b_p \\ c_{m+p} = c_{m-1+p} + d_p \end{cases}$$

dal quale si deduce facilmente come $\{a_{m+p}\}$ e $\{c_{m+p}\}$ altro non

sono se non progressioni aritmetiche di ragioni, rispettivamente, b_p e d_p, e termini iniziali a_p e c_p (vedi (36)), mentre le $\{b_{m+p}\}$ e $\{d_{m+p}\}$ sono successioni costanti uguali rispettivamente a b_p e d_p.

Per cui avremo, per gli estremi dell'intervallo (35):

$$\frac{a_{m+p}}{c_{m+p}} = 2\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p+2m\left[(1+\sqrt{5})^{p-1}-(1-\sqrt{5})^{p-1}\right]}{(1+\sqrt{5})^{p+1}-(1-\sqrt{5})^{p+1}+2m\left[(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p\right]}$$

e

$$\frac{b_{m+p}}{d_{m+p}} = 2\cdot\frac{(1+\sqrt{5})^{p-1}-(1-\sqrt{5})^{p-1}}{(1+\sqrt{5})^p-(1-\sqrt{5})^p}, \quad p = 1,2,\ldots$$

Considerando le (31), vedi (65), avremo invece il sistema:

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + b_0 \\ c_p = d_{p-1} + d_0 \\ b_p = b_0 \\ d_p = d_0 \end{cases}$$

che, per le (33), ci fornisce le:

$$\begin{cases} a_p = a_{p-1} + 1 \\ c_p = c_{p-1} \\ b_p = 1 \\ d_p = 0 \end{cases}$$

ovvero la soluzione

$$\begin{cases} a_p = p \\ c_p = 1 \\ b_p = 1 \\ d_p = 0 \end{cases}$$

che genera gli intervalli: $p<x<\infty$.

Per quanto concerne infine le (32), avremo il sistema:

$$\begin{cases} a_{p+m} = a_{p+m-1} + b_{p+m-1} \\ c_{p+m} = c_{p+m-1} + d_{p+m-1} \\ b_{p+m} = a_{p+m-1} \\ d_{p+m} = c_{p+m-1} \end{cases}$$

con le condizioni iniziali:

$$(a_p, c_p; b_p, d_p) = (p,1;1,0) \quad \text{e}$$

$$(a_{p+1}, c_{p+1}; b_{p+1}, d_{p+1}) = (p+1,1;p,1),$$

la cui soluzione sarà:

$$\begin{cases} a_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^m}\cdot\left\{\dfrac{p}{2}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^{m+1}-(1-\sqrt{5})^{m+1}\right]+(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m\right\} \\ c_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^{m+1}}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^{m+1}-(1-\sqrt{5})^{m+1}\right] \\ b_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^{m-1}}\cdot\left\{\dfrac{p}{2}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m\right]+(1+\sqrt{5})^{m-1}-(1-\sqrt{5})^{m-1}\right\} \\ d_{p+m} = \dfrac{1}{\sqrt{5}\cdot 2^m}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m\right] \end{cases}$$

la quale conduce, riguardo alle (35), alle:

$$\frac{a_{m+p}}{c_{m+p}} = 2\cdot\frac{\left\{\dfrac{p}{2}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^{m+1}-(1-\sqrt{5})^{m+1}\right]+(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m\right\}}{(1+\sqrt{5})^{m+1}-(1-\sqrt{5})^{m+1}}$$

e

$$\frac{b_{p+m}}{d_{p+m}} = 2\cdot\frac{\left\{\dfrac{p}{2}\cdot\left[(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m\right]+(1+\sqrt{5})^{m-1}-(1-\sqrt{5})^{m-1}\right\}}{(1+\sqrt{5})^m-(1-\sqrt{5})^m}$$

con $m = 1,2,\ldots$

--o--

BIBLIOGRAFIA

|1| Alchian A.A., "The rate of Interest, Fisher's Rate of Return over Costs and Keynes' Internal Rate of Return". **American Economic Review**, dicembre 1955, vol. 45, pp.938--943.

|2| Andretta A.,"Nota sul Teorema del Troncamento e sul Tasso Interno di Rendimento". **Ricerche Economiche**, dicembre 1977, vol.31, pp.375-387.

|3| Arrow K.J. e D.Levhari, "Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment". **The Economic Journal**, settembre 1969, vol.79, pp.560-566.

|4| Aucamp D.L. e W.L.Eckardt, "A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: Comment". **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, giugno 1976, vol.11, pp.329-332.

|5| Bailey M.J., "Formal Criteria for Investment Decisions". **Journal of Political Economy**, ottobre 1959, vol.67, pp. 476-488.

|6| Bernhard R.H., "Discount Methods for Expenditure Evaluation. A clarification in their Assumptions". **The Journal of Industrial Engineering**, gennaio-febbraio 1962, vol.13, pp.19-27.

|7| Bernhard R.H., "On the Inconsistency of the Soper and Sturm-Kaplan Conditions for Uniqueness of the Internal Rate of Return". **The Journal of Industrial Engineering**, agosto 1967, vol.18, pp.498-500.

|8| Bernhard R.H., "A Comprehensive Comparison and Critique of Discounting Indices Proposed for Capital Investment Evaluation". **The Engineering Economist**, 1971, vol.16, pp. 157-186.

|9| Bernhard R.H., "Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate of Return, and the Question of Project Acceptability". **Journal of Financial and Quantitative analysis**, marzo 1977, vol.12, pp.33-38.

|10| Bernhard R.H., "A More General Sufficient Condition for a Unique Internal Rate of Return". **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, giugno 1979,vol.14, pp.337-341.

|11| Bernhard R.H., "A Simpler Internal Rate of Return Uniqueness Condition which Dominates that of De Faro and Soares". **The Engineering Economist**, 1979, vol.24, pp.71-74.

|12| Bernhard R.H., "A Simplification and an Extension of the Bernhard-De Faro Sufficient Condition for a Unique Internal Rate of Return". **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, marzo 1980, vol.15, pp.201-209.

|13| Bernhard R.H. e C.J. Norstrøm, "A Further Note on Unrecovered Investment, Uniqueness of the Internal Rate,and the Question of Project Acceptability". **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, giugno 1980, vol.15,pp.421-423.

|14| Boulding K.E., "The Theory of the Single Investment".**Quarterly Journal of Economics**, maggio 1935, vol.49, pp.475-494.

|15| Capettini R., R.A. Grimlund e H.R. Toole, "Comment: the Unique, Real Internal Rate of Return". **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, dicembre 1979, vol.14, pp.1091-1094.

|16| Castagnoli E., "Sul Confronto fra i Criteri del Risultato Economico Attualizzato e del Tasso di Rendimento". **Studi e Ricerche (Facoltà di Economia e Commercio dell'Università degli Studi di Parma)**, 1975, vol.12, pp.127-133.

|17| Castagnoli E. e L. Peccati, "Alcune Considerazioni in Tema di Classificazione degli Investimenti". **Giornale degli Economisti e Annali di Economia**, marzo-aprile 1973, vol. 32, pp.235-252.

|18| De Faro C., "A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: a Comment".**Journal of Financial and Quantitative Analysis**, settembre 1973, vol. 8, pp.683-684.

|19| De Faro C., "On the Internal Rate of Return Criterion". **The Engineering Economist**, 1974, vol.19, pp.165-194.

|20| De Faro C., "A Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return: Further Comment". **Journal of Financial and Quantitative Analysis**, settembre 1978, vol.13, pp.577-584.

|21| De Faro C. e L. Soares, "A Flexible Sufficient Condition for a Unique Non-negative Internal Rate of Return". **The Engineering Economist**, 1978, vol.23, pp.117-127.

|22| Dougherty C.R.S., "On the Rate of Return and the Rate of Profit". **The Economic Journal**, dicembre 1972, vol.82, pp. 1324-1350.

|23| Eatwell J., "A Note on the Truncation Theorem". **Kyklos**, 1975, vol.28, fasc.4, pp.870-875.

|24| Elemi G. e G. Zandano, "Alcune Osservazioni sul Metodo del Beneficio Attualizzato come Criterio di Selezione dei Progetti di Investimento". **L'Industria**, luglio-dicembre 1971, pp.316-321.

|25| Filippini C. e L. Filippini, "Nota Critica al Teorema del Troncamento". **Ricerche Economiche**, gennaio-dicembre 1974, vol.28, pp.3-18.

|26| Fisher I., **The Rate of Interest**. MacMillan,New York 1907.

|27| Fisher I., **The Theory of Interest**. MacMillan, New York 1930.

|28| Flaiano R., "Sull'Equazione del Tasso Interno di Rendimento di un Investimento. Computo delle Radici Reali". **Facoltà di Scienze Statistiche Demografiche ed Attuariali.Istituto di Scienze Attuariali, Università degli Studi di Roma**, 1971.

|29| Flemming J.S. e J.F. Wright, "Uniqueness of the Internal Rate of Return: a Generalization". **The Economic Journal**, giugno 1971, vol.81, pp.256-262.

|30| Frost R.A. e L.D. Schall, "Ramsey's Investment Criterion". **Journal of Political Economy**, luglio-agosto 1972, vol.80, pp.803-806.

|31| Gronchi S., "On Investment Criteria Based on the Internal Rate of Return". Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena, aprile 1984, n.25.

|32| Gronchi S., "On Karmel's Criterion for Optimal Truncation". Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena, maggio 1984, n.26.

|33| Gronchi S., "On Truncation Theorems". Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena, giugno 1984, n.27.

|34| Gronchi S., "Un Tasso di Rendimento Generalizzato". Lavoro presentato al Seminario su: Teoria, Economia, Inflazione e Sviluppo. Università di Cagliari, 4-5-6 ottobre 1984.

|35| Hammond J.S., "A Note on Bounding the Number of Rates of Return of a Project". Harward Business School Working Papers, 1974, n.74-1.

|36| Herbst A.F., "A FORTRAN IV Procedures for Determining Return on Invested Capital". Management Science, febbraio 1974, vol.20, p.1022.

|37| Herbst A., "The Unique, Real Internal Rate of Return: Caveat Emptor". Journal of Financial and Quantitative Analysis, giugno 1978, vol.13, pp.363-370.

|38| Hirshleifer J., "On the Theory of Optimal Investment Decision". Journal of Political Economy, agosto 1958, vol.66, pp.329-352.

|39| Hirshleifer J., "Marginal Efficiency of Capital:Comment". The Economic Journal, settembre 1959, vol.69, pp.592-593.

|40| Hirshleifer J., "On Multiple Rates of Return: Comment". The Journal of Finance, marzo 1969, vol.24, p.98.

|41| Jaccod P., S.De Cristofaro e E.Fabiano, "Un Confronto fra Metodi Attualizzati di Scelta degli Investimenti". Note Economiche, 1982, n.3, pp.43-62.

|42| Jean W.H., "On Multiple Rates of Return".Journal of Finance, marzo 1968, vol.23, pp.187-191.

|43| Jean W.H., "Reply". The Journal of Finance, marzo 1969, vol.24, pp.99-100.

|44| Kaplan S., "A Note on a Method for Precisely Determining the Uniqueness or Non-uniqueness of the Internal Rate of Return for a Proposed Investment". The Journal of Industrial Engineering, gennaio-febbraio 1965, vol.16, pp. 70-71.

|45| Kaplan S., "Computer Algorithms for Finding Exat Rates of Return". Journal of Business, ottobre 1967, vol.40, pp. 389-392.

|46| Karmel P.H., "The Marginal Efficiency of Capital". Economic Record, dicembre 1959, vol.35, pp.429-434.

|47| Lazzar F., "Condizioni Sufficienti per l'Unicità del Tasso Interno di Rendimento". Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, luglio-dicembre 1980, vol.43, pp.8i- 104.

|48| Lorie J. e L.J. Savage, "Three Problems in Rationing Capital". Journal of Business, ottobre 1955, vol.28, pp.229-239.

|49| Lutz F. e V. Lutz, The Theory of Investment of the Firm. Princeton University Press, Princeton (N.J.), 1951.

|50| Norstrøm C.J. "Uniqueness of the Internal Rate of Return with Variable Life of Investment: a Comment".The Economic Journal, dicembre 1970, vol.80, pp.983-984.

|51| Norstrøm C.J., "A Modification of the Internal Rate of Return Method". Statsokonomisk Tidsskrift, 1971, n.4, pp. 214-231.

|52| Norstrøm C.J., "A Sufficient Condition for a Unique Nonnegative Internal Rate of Return". Journal of Financial and Quantitative Analysis, giugno 1972, vol.7, pp.1835-1839.

|53| Nuti D.M., On the Truncation of Production Flows".Kyklos, 1973, vol.80, fasc.3, pp.485-496.

|54| Olivieri G., "Alcune Generalizzazioni di un Teorema sull'Unicità del Tasso Interno di Rendimento di Progetti di Investimento o di Finanziamento". Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, gennaio-dicembre 1978, vol.41,pp. 149-159.

|55| Panton D.B. e W.A.Verdini, "A FORTRAN Program for Applying Sturm's Theorem in Counting Internal Rates of Return". Journal of Financial and Quantitative Analysis, settembre 1981, vol.16, pp.381-388.

|56| Pasinetti L.L., "Switches of Techniques and the Rate of Return in Capital Theory". The Economic Journal, settembre 1969, vol.79, pp.508-531.

|57| Peccati L., "Alcuni Risultati sul Tasso Interno di Rendimento di un 'Operazione Finanziaria".Studi e Ricerche (Facoltà di Economia e Commercio dell'Università degli Studi di Parma), 1975, vol.12, pp.171-180.

|58| Pistoia A., "Questioni di Stabilità in Problemi di Scelta" (Nota 1°) Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria dell'Università di Pavia, n.45, 1973.

|59| Pistoia A., "Questioni di Stabilità in Problemi di Scelta" (Nota 2°) Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria dell'Università di Pavia, n.47, 1974.

|60| Pistoia A., "Questioni di Stabilità in Problemi di Scelta" (Nota 3°) Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria dell'Università di Pavia, N.50, 1974.

|61| Pistoia A., "Sulla Dinamica di Operazioni Finanziarie non Necessariamente Certe". (Nota 1°) Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, vol. 36, pp.1-14, 1973.

|62| Pistoia A., "Sulla Dinamica di Operazioni Finanziarie non Necessariamente Certe" (Nota 2°) Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, vol.37, pp.15-24, 1974.

|63| Pistoia A., "Di una Ricerca Propria alla Scelta tra Investimenti Alternativi". Quaderni dell'Istituto di Scienze Attuariali della Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali dell'Università degli Studi di Roma, n.90, 1979.

|64| Pistoia A., "Sulla Funzione del Valore Attuale". Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, vol.42, pp.1-18, 1979.

|65| Pistoia A., "Sulla Struttura di un Polinomio Algebrico". Fascicoli dell'Istituto di Matematica Generale e Finanziaria dell'Università di Pavia, n.59, 1979.

|66| Pistoia A., "About Internal Rate of Return". In Mathematical Programming and its Applications, a cura di G.Castellani e P.Mazzoleni, F.Angeli, Milano, 1981.

|67| Pistoia A., "About Internal Rate of Return". Atti del III Convegno A.M.A.S.E.S., Napoli, 1979.

|68| Pistoia A., "Sull'Unicità del T.I.R.". Nota inviata al Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari, 1981.

|69| Pitchford J.D. e A.J. Hagger, "A Note on the Marginal Efficiency of Capital". The Economic Journal,dicembre 1958, vol.68, pp.597-600.

|70| Pratt. J.W., "Finding How Many Roots a Plynomial Has in (0,1) or (0, $+\infty$)". American Mathematical Montly, ottobre 1979, vol.86, pp.630-648.

|71| Pratt. J.W. e J.S.Hammond, "Evaluating and Comparing Projects: Simple Detection of False Alarm". The Journal of Finance, dicembre 1979, vol.34, pp.1231-1242.

|72| Puccinelli P., "Alcuni Aspetti Controversi della Teoria della Domanda di Investimenti". Note Economiche, gennaio-febbraio 1976, pp.35-93.

|73| Ramsey J.B., "The Marginal Efficiency of Capital, the Internal Rate of Return, and Net Present Value: an Analysis of Investment Criteria". Journal of Political Economy, settembre-ottobre 1970, vol.78, pp.1017-1027.

|74| Ramsey J.B., "Ramsey's Investment Criterion: a Reply". Journal of Political Economy, luglio-agosto 1972, vol.80, pp. 807-810.

|75| Sansone G. e R. Conti, Lezioni di Analisi Matematica. CEDAM, Padova, 1958.

|76| Silcock T.H., "Complementarity and Future Time: a Note on the Marginal Efficiency of Capital". **The Economic Journal**, dicembre 1959, vol.69, pp.816-819.

|77| Solomon E., "The Arithmetic of Capital Budgeting Decisions". **Journal of Business**, aprile 1956, vol.29, pp.124-129.

|78| Soper C.S., "The Marginal Efficiency of Capital:a Further Note". **The Economic Journal**, marzo 1959, vol.69, pp.174-177.

|79| Teichroew D., A. Robichek e M.Montalbano, "Mathematical Analysis of Rates of Return under Certainty". **Management Science**, gennaio 1965, vol.11, pp.395-403.

|80| Teichroew D., A.Robichek e M.Montalbano, "An Analysis of Criteria for Investment and Financial Decisions under Certainty". **Management Science**, novembre 1965, vol.12, pp. 151-179.

|81| Trovato M., **Investimenti e Decisioni**. Isedi, Milano 1972.

|82| Trovato M., "Sulla Definizione di Classi di Operazioni di Investimento a Tasso di Rendimento Unico". **Giornale degli Economisti e Annali di Economia**, luglio-agosto 1972, vol. 31, pp.503-513.

|83| Trovato M., "Sulla Validità del Tasso Interno di Rendimento come Criterio di Selezione dei Progetti di Investimento". **Giornale degli Economisti e Annali di Economia**, settembre-ottobre 1972, vol.31, pp.678-691.

|84| Turnbull W.H., **Theory of Equations**. Oliver & Boyd, Edinburgh, 1952.

|85| Uspensky J.V., **Theory of Equations**, McGraw-Hill, New York 1948.

|86| Volpe di Prignano E. e C.Sica, "Problems of Valuation in Financial Substitutive Operations and in Mixed Projects". In **Mathematical Programming and its Economic Application**, a cura di G.Castellani e P.Mazzoleni. Franco Angeli, Milano, 1981.

|87| Wright J.F., "The Marginal Efficiency of Capital".**The Economic Journal**, dicembre 1959, vol.69, pp.813-816.

|88| Wright J.F., "Some Further Comments on the Ambiguity and Usefulness of Marginal Efficiency as Investment Criterion". **Oxford Economic Papers**, marzo 1965, vol.17, pp.81-89.

- La revisione delle bozze consente di segnalare, al lettore interessato, il volume recentemente uscito:
Gronchi S., **Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: una analisi teorica**",Collana dell'Istituto di Economia. Siena, 1984.

Elenco dei Quaderni pubblicati

n. 1 (febbraio 1979)
MASSIMO DI MATTEO
Alcune considerazioni sui concetti di lavoro produttivo e improduttivo in Marx.

n. 2 (marzo 1979)
MARIA L.RUIZ
Mercati oligopolistici e scambi internazionali di manufatti. Alcune ipotesi e un'applicazione all'Italia

n. 3 (maggio 1979)
DOMENICO MARIO NUTI
Le contraddizioni delle economie socialiste: una interpretazione marxista

n. 4 (giugno 1979)
ALESSANDRO VERCELLI
Equilibrio e dinamica del sistema economico-semantica dei linguaggi formalizzati e modello keynesiano

n. 5 (settembre 1979)
A. RONCAGLIA - M. TONVERONACHI
Monetaristi e neokeynesiani: due scuole o una?

n. 6 (dicembre 1979)
NERI SALVADORI
Mutamento dei metodi di produzione e produzione congiunta

n. 7 (gennaio 1980)
GIUSEPPE DELLA TORRE
La struttura del sistema finanziario italiano: considerazioni in margine ad un'indagine sull'evoluzione quantitativa nel dopoguerra (1948-1978)

n. 8 (gennaio 1980)
AGOSTINO D'ERCOLE
Ruolo della moneta ed impostazione antiquantitativa in Marx: una nota

n. 9 (novembre 1980)
GIULIO CIFARELLI
The natural rate of unemployment with rational expectations hypothesis. Some problems of estimation

n. 10 (dicembre 1980)
SILVANO VICARELLI
Note su ammortamenti, rimpiazzi e tasso di crescita

n. 10 bis (aprile 1981)
LIONELLO F. PUNZO
Does the standard system exist?

n. 11 (marzo 1982)
SANDRO GRONCHI
A meaningful sufficient condition for the uniqueness of the internal rate of return

n. 12 (giugno 1982)
FABIO PETRI
Some implications of money creation in a growing economy

n. 13 (settembre 1982)
RUGGERO PALADINI
Da Cournot all'oligopolio: aspetti dei processi concorrenziali

n. 14 (ottobre 1982)
SANDRO GRONCHI
A Generalized internal rate of return depending on the cost of capital

n. 15 (novembre 1982)
FABIO PETRI
The Patinkin controversy revisited

n. 16 (dicembre 1982)
MARINELLA TERRASI BALESTRIERI
La dinamica della localizzazione industriale: aspetti teorici e analisi empirica

n. 17 (gennaio 1983)
FABIO PETRI
The connection between Say's law and the theory of the rate of interest in Ricardo

n. 18 (gennaio 1983)
GIULIO CIFARELLI
Inflation and output in Italy: a rational expectations interpretation

n. 19 (gennaio 1983)
MASSIMO DI MATTEO
Monetary conditions in a classical growth cycle

n. 20 (marzo 1983)
MASSIMO DI MATTEO - MARIA L. RUIZ
Effetti dell'interdipendenza tra paesi produttori di petrolio e paesi industrializzati: un'analisi macrodinamica

n. 21 (marzo 1983)
ANTONIO CRISTOFARO
La base imponibile dell'IRPEF: un'analisi empirica (marzo 1983)

n. 22 (gennaio 1984)
FLAVIO CASPRINI
L'efficienza del mercato dei cambi. Analisi teorica e verifica empirica

n. 23 (febbraio 1984)
PIETRO PUCCINELLI
Imprese e mercato nelle economie socialiste: due approcci alternativi

n. 24 (febbraio 1984)
BRUNO MICONI
Potere prezzi e distribuzione in economie mercantili caratterizzate da diverse relazioni sociali

n. 25 (aprile 1984)
SANDRO GRONCHI
On investment criteria based on the internal rate of return

n. 26 (maggio 1984)
SANDRO GRONCHI
On Karmel's criterion for optimal truncation

n. 27 (giugno 1984)
SANDRO GRONCHI
On truncation "theorems"

n. 28 (ottobre 1984)
LIONELLO F. PUNZO
La matematica di Sraffa

n. 29 (dicembre 1984)
ANTONELLA STIRATI
Women's work in economic development process

n. 30 (gennaio 1985)
GIULIO CIFARELLI
The natural rate of unemployment and rational expectation hypotheses: some empirical tests.

n. 31 (gennaio 1985)
SIMONETTA BOTARELLI
Alcuni aspetti della concentrazione dei redditi nel Comune di Siena

n.32 (febbraio 1985)
FOSCO GIOVANNONI
Alcune considerazioni metodologiche sulla riforma di un sistema tributario

n. 33 (febbraio 1985)
SIMONETTA BOTARELLI
Ineguaglianza dei redditi personali a livello comunale

n. 34 (marzo 1985)
IAN STEEDMAN
Produced inputs and tax incidence theory

n. 35 (aprile 1985)
RICHARD GOODWIN
Prelude to a reconstruction of economic theory. A critique of Sraffa

n. 36 (aprile 1985)
MICHIO MORISHIMA
Classical, neoclassical and keynesian in the Leontief world

n. 37 (aprile 1985)
SECONDO TARDITI
Analisi delle politiche settoriali: prezzi e redditi nel settore agroalimentare

n. 38 (maggio 1985)
PIETRO BOD
Sui punti fissi di applicazioni isotoniche.

n. 39 (giugno 1985)
STEFANO VANNUCCI
Schemi di gioco simmetrici e stabili e teoremi di possibilità per scelte collettive.

n. 40 (luglio 1985)
RICHARD GOODWIN
The use of gradient dynamics in linear general disequilibrium theory.

n. 41 (agosto 1985)
M. MORISHIMA and T. SAWA
Expectations and the Life Span of the regime.

n. 42 (settembre 1985)
ALESSANDRO VERCELLI
Keynes, Schumpeter, Marx and the structural instability of capitalism.

n. 43 (ottobre 1985)
ALESSANDRO VERCELLI
Money and production in Schumpeter and Keynes: two dichotomies