

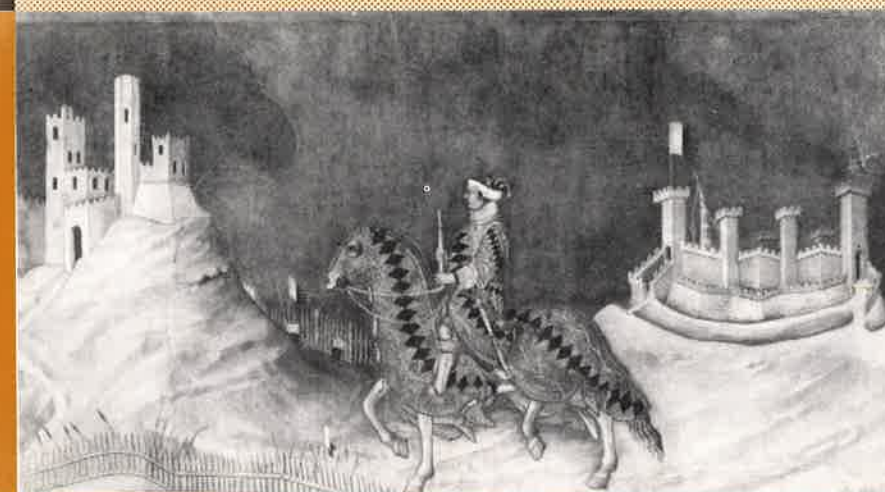
UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie



QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

Enrico Zaghini

UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA
DELL'ESISTENZA DI EQUILIBRI IN UN MODELLO
DI ACCUMULAZIONE PURA



QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA

COMITATO SCIENTIFICO

MARCELLO DE CECCO

MASSIMO DI MATTEO

RICHARD GOODWIN

SANDRO GRONCHI

GIACOMO PATRIZI

SILVANO VICARELLI

Coordinatore

SANDRO GRONCHI

Alla presente Collana "gialla" di quaderni l'Istituto di Economia affianca una Collana "celeste" di monografie. I numeri pubblicati a tutt'oggi sono i seguenti:

- 1) GIUSEPPE DELLA TORRE, Istituzioni Creditizie ed Accumulazione del Capitale in Italia (1948-81), 1984.
- 2) SANDRO GRONCHI, Tasso Interno di Rendimento e Valutazione dei Progetti: una Analisi Teorica, 1984.
- 3) ALDINO MONTI, La Proprietà Immobiliare a Bologna in Età Napoleonica (1797-1810), 1984.
- 4) GIULIO CIFARELLI, Equilibrium and Disequilibrium Interpretations of Inflation, 1985.

• Redazione: Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie - Piazza S. Francesco, 17 - 53100 Siena - tel. 0577/49059

• La Redazione ottempera agli obblighi previsti dall'Art. 1 del D.L.L. 31.8.45 n. 660

• Le richieste di copie della presente pubblicazione dovranno essere indirizzate alla Redazione

• I Quaderni dell'Istituto di Economia dell'Università di Siena vengono pubblicati dal 1979 come servizio atto a favorire la tempestiva divulgazione di ricerche scientifiche originali, siano esse in forma provvisoria o definitiva. I Quaderni vengono regolarmente inviati a tutti gli istituti e dipartimenti italiani, a carattere economico, nonché a numerosi docenti e ricercatori universitari. Vengono altresì inviati ad enti e personalità italiane ed estere. L'accesso ai Quaderni è approvato dal Comitato Scientifico, sentito il parere di un referee.

Enrico Zaghini

UNA DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA DELL'ESISTENZA DI
EQUILIBRI IN UN MODELLO DI ACCUMULAZIONE
PURA



Siena, gennaio 1986

Enrico Zaghini è stato direttore dell'Istituto di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università di Siena. E' ordinario di Econometria presso la Facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche ed Attuariali dell'Università di Roma "La Sapienza".

1. Introduzione^(*)

In un lavoro precedente⁽¹⁾ è contenuta la prova dell'esistenza di soluzioni economicamente significative per un modello di accumulazione guidata da un meccanismo di uguaglianza dei saggi di profitto sugli investimenti nei vari settori.

La presenza di un'ipotesi molto generale sulle aspettative ha impedito di estendere al modello in questione la dimostrazione di esistenza di soluzioni utilizzata per un altro modello di accumulazione, fondato sull'ipotesi particolare di aspettative statiche, e basata sul teorema del punto fisso di Kakutani. Seguendo le linee di quest'ultima dimostrazione, ci si è infatti trovati nella necessità di ricorrere ad un teorema del punto fisso più generale di quello di Kakutani: il teorema di Eilenberg e Montgomery. Si sono in conseguenza dovuti utilizzare concetti ancora più astratti e lontani dal normale bagaglio di conoscenze matematiche dell'economista.

Lo scopo di questa nota è quello di fornire una dimostrazione alternativa basata su una diversa impostazione che consente di impiegare uno strumento matematico più semplice, quale il teorema del punto fisso di Brouwer per le funzioni continue, al fine di facilitare la comprensione del ragionamento economico sottostante il modello.

2. Il modello

Per agevolare la lettura della nota, si riporta una sintetica descrizione del modello⁽²⁾.

Le condizioni di equilibrio sono rappresentate dalle seguenti relazioni:

$$(1) \quad x = Ax + Bz$$

$$(2) \quad x \leq K \quad \text{se } x_j < K_j, \text{ allora } u_j = 0$$

$$(3) \quad p = pA + u$$

$$(4) \quad pB \geq (1/r) \hat{u} \quad \text{se } \sum_{i=1}^n b_{ij} p_j > (1/r) \hat{u}_j, \text{ allora } z_j = 0$$

$$(5) \quad pBz = uK$$

dove A e B sono le due matrici non negative di ordine nxn dei coefficienti di produzione corrente e, rispettivamente, dei coefficienti di capitale. K è il vettore colonna delle capacità produttive esistenti dei vari settori⁽³⁾, x è il vettore colonna dei livelli produttivi dei vari settori, z è il vettore colonna delle quantità prodotte di unità di capacità produttiva dei vari settori, cioè gli investimenti, p è il vettore riga dei prezzi correnti di mercato dei vari beni, u è il vettore riga dei profitti correnti per unità di capacità produttiva dei vari settori, $\hat{u}$ è il vettore riga dei profitti attesi sulle varie unità

di capacità produttiva in tutti i periodi futuri, $\hat{r}$ è il saggio atteso di profitto.

Vengono fatte le seguenti ipotesi sui dati:

- La matrice A è irriducibile e soddisfa le condizioni di Hawkins-Simon. Essa incorpora anche le quantità dei vari beni necessarie per la manutenzione e la reintegrazione degli stocks.
- Ogni colonna della matrice B ha almeno un elemento positivo.
- Il vettore K è positivo. Le capacità produttive di nuova produzione entrano in funzione nel periodo successivo.
- I profitti attesi $\hat{u}$ sono funzioni dei profitti correnti u. Queste sono univoche, non negative, continue e positivamente omogenee e sono inoltre tali che il profitto atteso di almeno un settore è positivo per ogni vettore semipositivo dei profitti correnti.
- Tutto il reddito viene risparmiato ed investito.

3. Esistenza di soluzioni

La (1) e la (3), tenendo conto dell'ipotesi a), permettono di esprimere x e p in termini di z e di u, ottenendosi $x = (I-A)^{-1}Bz$ e $p = u(I-A)^{-1}$. Effettuando le sostituzioni in (2) e (4), le relazioni (1)-(4) si riducono ai due seguenti gruppi di disuguaglianze:

$$(6) \quad (I-A)^{-1}Bz \leq K$$

$$(7) \quad u(I-A)^{-1}B \geq (1/\hat{r}) \hat{u}$$

$$(8) \quad u(I-A)^{-1}Bz = uK$$

Il modello si riduce pertanto alle (6), (7) e (8).

Si consideri tuttavia, per il momento, il modello rappresentato dalle (6), dalle (7) e dalla seguente disuguaglianza

$$(9) \quad \hat{r}uK \leq \hat{u}z$$

Si definiscano ora le funzioni

$$(10) \quad E = (I-A)^{-1}Bz - K$$

$$(11) \quad R = \hat{f}u - u(I-A)^{-1}B$$

$$(12) \quad H = (1/\hat{r})uK - \hat{u}z$$

dove

$$(13) \quad \hat{f} = 1/\hat{r}$$

Si considerino inoltre l'insieme

$$S = \left\{ u \mid u \geq 0, \sum_{i=1}^n u_i = 1 \right\}$$

e l'insieme

$$V = \left\{ z \mid 0 \leq z \leq \bar{z} \right\}$$

dove $\bar{z}_i$, componente i.ma del vettore $\bar{z}$, è tale che

$$(I-A)^{-1}B \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} > K \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

L'esistenza di un tale $\bar{z}$ è garantita dalle ipotesi a) e b). Risulta chiaramente che gli insiemi S e V sono chiusi, limitati e convessi.

Per individuare un campo di variazione per f che sia anch'esso chiuso, limitato e convesso, si osservi che, dato $u \in S$, esiste, per l'ipotesi d), almeno un $\hat{u}_i > 0$. Pertanto dato $u \in S$, deve essere

$$(14) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \hat{u}_i > 0$$

Tenendo conto che $\max_{1 \leq i \leq n} \hat{u}_i$ è una funzione continua rispetto ad u nell'insieme

S , essa possiede un minimo. Tenendo poi conto che la funzione considerata è positiva su tutto S , anche il valore minimo deve essere positivo, cioè

$$(15) \quad \min_{u \in S} \max_{1 \leq i \leq n} \hat{u}_i = \delta > 0.$$

Con un ragionamento analogo si dimostra che la funzione di u ⁽⁴⁾

$$(16) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \{ u(I-A)^{-1}B \}_i$$

possiede un massimo in S , cioè

$$(17) \quad \max_{u \in S} \max_{1 \leq i \leq n} \{ u(I-A)^{-1}B \}_i = \gamma > 0.$$

E' allora possibile scegliere un $\bar{f}$ positivo tale che

$$(18) \quad \gamma < \bar{f} \delta,$$

cioè un valore di f per cui almeno un elemento di R è strettamente positivo.

Si indichi infine con T l'insieme $T = \{ f \mid 0 \leq f \leq \bar{f} \}$, chiuso, limitato e convesso.

E' possibile allora costruire la seguente trasformazione dell'insieme

$S \times V \times T$ in se stesso

$$(19) \quad U = (1/\lambda) \max \{ 0, u + hE \}$$

$$(20) \quad Z = \text{med} \{ 0, z + hR, \bar{z} \}$$

$$(21) \quad F = \text{med} \{ 0, f + hH, \bar{f} \}$$

dove

$$(22) \quad \lambda = \sum_{i=1}^n \max \{ 0, u_i + hE_i \},$$

h è una costante positiva abbastanza piccola da garantire $\lambda > 0$ (l'esistenza di una h cosiffatta è assicurata dalla circostanza che E è limitata inferiormente), $\max \{ a, b \}$ indica il più grande fra a e b e $\text{med} \{ a, b, c \}$ indica il valore intermedio fra a, b, c .

Poichè la trasformazione suddetta è continua⁽⁵⁾ e l'insieme $S \times V \times T$ è chiuso, limitato e convesso, si può applicare il teorema di Brouwer ed affermare l'esistenza di almeno un punto fisso u^*, z^*, f^* tale che

$$(23) \quad u^* = (1/\lambda^*) \max \{ 0, u^* + hE^* \}$$

$$(24) \quad z^* = \text{med} \{ 0, z^* + hR^*, \bar{z} \}$$

$$(25) \quad f^* = \text{med} \{ 0, f^* + hH^*, \bar{f} \}$$

dove λ^* , E^* , R^* ed H^* sono i valori di λ , E , R ed H calcolati nel punto fisso.

Si controlla preliminarmente che le funzioni E , R ed H soddisfano l'identità

$$(26) \quad uE + Rz + fH \equiv 0$$

nelle variabili u , z ed f comprese in S , V e T , con $f > 0$.

Si vuole ora dimostrare che $H^* \leq 0$. Si supponga infatti il contrario, cioè che $H^* > 0$. Per la (25) deve allora essere $f^* = \bar{f}$ da cui segue che almeno un $R_i^* > 0$. Da $R_i^* > 0$ segue, per la (24), $z_i = \bar{z}_i$, che implica $E^* > 0$. Appartenendo u^* a S , deve quindi essere $u^*E^* > 0$. Dalla (24) segue inoltre che $z_i^* = 0$, se $R_i^* < 0$. Deve quindi essere $z_i^* R_i^* \geq 0$ per ogni i . Tenendo conto che per almeno un i è $R_i^* > 0$ cui corrisponde $z_i^* = \bar{z}_i > 0$, si ricava che $R^*z^* > 0$. Da questo e da $u^*E^* > 0$ si ottiene, tenendo conto della (26), $fH^* < 0$, ovvero $H^* < 0$, il che contraddice $H^* > 0$. Deve pertanto essere $H \leq 0$.

Si supponga ora che sia $H^* < 0$. Dalla (25) segue allora $f^* = 0$ che implica ⁽⁶⁾ $H^* = +\infty$, che contraddice $H^* < 0$. Deve quindi essere $H^* = 0$.

Deve inoltre essere $f^* > 0$. Infatti $f^* = 0$ implica $H^* = +\infty$, il che a sua volta implica, per la (25), $f = \bar{f}$, contraddicente $f^* = 0$.

Si vuol ora far vedere che vale la relazione

$$(27) \quad u_i^* \max \{0, u_i^* + hE_i^*\} = u_i^* (u_i^* + hE_i^*)$$

Infatti o è $u_i^* = 0$ e la (27) è immediatamente soddisfatta ovvero è $u_i^* > 0$.

In quest'ultimo caso, dalla (23) si ha $\max \{0, u_i^* + hE_i^*\} = \lambda^* u_i^* > 0$, il che implica $\max \{0, u_i^* + hE_i^*\} = u_i^* + hE_i^*$, da cui segue il soddisfacimento della (27).

Si moltiplichino ora la i -esima relazione delle (23) per u_i , si porti λ^* nel membro di sinistra, si tenga conto della (27) e si sommi rispetto a i , ottenendosi

$$(28) \quad \lambda^* \sum_{i=1}^n (u_i^*)^2 = \sum_{i=1}^n (u_i^*)^2 + h \sum_{i=1}^n u_i^* E_i^*$$

da cui

$$(29) \quad (\lambda^* - 1) \sum_{i=1}^n (u_i^*)^2 = h \sum_{i=1}^n u_i^* E_i^*$$

Tenendo conto di $f^*H^* = 0$ e di $R^*z^* \geq 0$, dalla (26) si ricava $u^*E^* \leq 0$, il che, tenendo conto della (29), implica a sua volta $\lambda^* \leq 1$.

Si supponga ora $\lambda^* < 1$. Poichè $u^* \in S$, c'è almeno un $u_i^* > 0$. Dalla (23) segue allora che per gli $u_i^* > 0$ si deve avere $E_i^* < 0$, mentre per gli $u_i^* = 0$ si ha $E_i^* \leq 0$, con la conseguenza che deve essere $u^*E^* < 0$. Tenendo conto di questo e di $f^*H^* = 0$, dalla (26) segue $R^*z^* > 0$, da cui si ricava che è

almeno un $R_i^* > 0$. Ma da $R_i^* > 0$ e dalla (24) segue $z_i^* = \bar{z}_i$, che implica $E^* > 0$, contraddicente $E_i^* < 0$ per almeno un i . Deve dunque essere $\lambda^* = 1$.

Per $\lambda^* = 1$, dalla (23) si ottiene che $E^* \leq 0$ e che $u_i^* = 0$, se $E_i^* < 0$.

Si dimostra poi che $R^* \leq 0$. Se infatti fosse un $R_i^* > 0$, dalla (24) si avrebbe $z_i^* = \bar{z}_i$ che implicherebbe $E^* > 0$, contraddicente $E^* \leq 0$.

Si è già visto che $z_i^* = 0$, se $R_i^* < 0$.

Si è pertanto dimostrato che il modello costituito dalle (6), (7) e (9) possiede almeno un equilibrio economicamente significativo. Poichè il modello originale ha la (8) al posto della (9), si deve ora far vedere che tale equilibrio soddisfa anche la (8). Postmoltiplicando la (7) nel punto di equilibrio per z^* e tenendo conto che $z_i^* = 0$, se la corrispondente relazione (7) è una stretta disuguaglianza, si ha

$$(30) \quad u^* (I-A)^{-1} Bz^* = (1 / r^*) u^* z^*$$

ovvero

$$(31) \quad \hat{r}^* u^* (I-A)^{-1} Bz^* = \hat{u}^* z^* .$$

Tenendo conto che in equilibrio la (9) è una uguaglianza e sostituendo la (31) nella (9), si ha

$$(32) \quad \hat{r}^* u^* k = \hat{r}^* u^* (I-A)^{-1} Bz^*$$

che, divisa per $\hat{r}^*$, coincide con la (8).

La soluzione u^* , z^* , $\hat{r}^*$ soddisfa quindi, oltre le (6) e (7), anche la (8).

Note

(*) La presente nota è stata scritta nell'ambito di una ricerca finanziata con fondi del Ministero della Pubblica Istruzione.

(1) E. Zaghini, *Prezzi naturali e prezzi di mercato. Un'interpretazione della teoria walrasiana di accumulazione*, Collana di studi dell'Istituto di Economia Politica, facoltà di Scienze Statistiche, Demografiche e Attuariali, Edizioni dell'Ateneo, Roma, 1970, pp. 67-70.

(2) Vedasi E. Zaghini, *op. cit.*, pp. 64-67. Per una completa descrizione del modello si rinvia a questa pubblicazione.

(3) Una unità di capacità produttiva del settore j è costituita dalle quantità b_{1j} , b_{2j} , ..., b_{nj} rispettivamente del primo, secondo, ..., n -mo bene capitale. Essa rende possibile in una unità di tempo la produzione di una unità del bene capitale j -mo.

(4) Con $\{u(I-A)^{-1}B\}_i$ si indica la componente i -ma del vettore $u(I-A)^{-1}B$

(5) Tutte le funzioni sono continue. Per quanto riguarda H si deve

però osservare che essa lo è in senso generalizzato per $f=0$, cioè nel senso che $\lim_{f \rightarrow 0+} H = +\infty$ ed il valore di H per $f=0$ è proprio $+\infty$. Si vede tuttavia che la (21) è continua nel senso normale anche per $f=0$, il che è ciò che importa per l'applicazione del teorema di Brouwer.

(6) Vedasi la nota n. 5.

Elenco dei Quaderni pubblicati

n. 1 (febbraio 1979)

MASSIMO DI MATTEO

Alcune considerazioni sui concetti di lavoro produttivo e improduttivo in Marx.

n. 2 (marzo 1979)

MARIA L. RUIZ

Mercati oligopolistici e scambi internazionali di manufatti. Alcune ipotesi e un'applicazione all'Italia

n. 3 (maggio 1979)

DOMENICO MARIO NUTI

Le contraddizioni delle economie socialiste: una interpretazione marxista

n. 4 (giugno 1979)

ALESSANDRO VERCELLI

Equilibrio e dinamica del sistema economico-semantica dei linguaggi formalizzati e modello keynesiano

n. 5 (settembre 1979)

A. RONCAGLIA - M. TONVERONACHI

Monetaristi e neokeynesiani: due scuole o una?

n. 6 (dicembre 1979)

NERI SALVADORI

Mutamento dei metodi di produzione e produzione congiunta

n. 7 (gennaio 1980)

GIUSEPPE DELLA TORRE

La struttura del sistema finanziario italiano: considerazioni in margine ad un'indagine sull'evoluzione quantitativa nel dopoguerra (1948-1978)

n. 8 (gennaio 1980)

AGOSTINO D'ERCOLE

Ruolo della moneta ed impostazione antiquantitativa in Marx: una nota

n. 9 (novembre 1980)

GIULIO CIFARELLI

The natural rate of unemployment with rational expectations hypothesis.
Some problems of estimation

n. 10 (dicembre 1980)

SILVANO VICARELLI

Note su ammortamenti, rimpiazzi e tasso di crescita

n. 10 bis (aprile 1981)

LIONELLO F. PUNZO

Does the standard system exist?

n. 11 (marzo 1982)

SANDRO GRONCHI

A meaningful sufficient condition for the uniqueness of the internal rate of return

n. 12 (giugno 1982)

FABIO PETRI

Some implications of money creation in a growing economy

n. 13 (settembre 1982)

RUGGERO PALADINI

Da Cournot all'oligopolio: aspetti dei processi concorrenziali

n. 14 (ottobre 1982)

SANDRO GRONCHI

A Generalized internal rate of return depending on the cost of capital

n. 15 (novembre 1982)

FABIO PETRI

The Patinkin controversy revisited

n. 16 (dicembre 1982)

MARINELLA TERRASI BALESTRIERI

La dinamica della localizzazione industriale: aspetti teorici e analisi empirica

n. 17 (gennaio 1983)

FABIO PETRI

The connection between Say's law and the theory of the rate of interest in Ricardo

n. 18 (gennaio 1983)

GIULIO CIFARELLI

Inflation and output in Italy: a rational expectations interpretation

n. 19 (gennaio 1983)

MASSIMO DI MATTEO

Monetary conditions in a classical growth cycle

n. 20 (marzo 1983)

MASSIMO DI MATTEO - MARIA L. RUIZ

Effetti dell'interdipendenza tra paesi produttori di petrolio e paesi industrializzati: un'analisi macrodinamica

n. 21 (marzo 1983)

ANTONIO CRISTOFARO

La base imponibile dell'IRPEF: un'analisi empirica (marzo 1983)

n. 22 (gennaio 1984)

FLAVIO CASPRINI

L'efficienza del mercato dei cambi. Analisi teorica e verifica empirica

n. 23 (febbraio 1984)

PIETRO PUCCINELLI

Imprese e mercato nelle economie socialiste: due approcci alternativi

n. 24 (febbraio 1984)

BRUNO MICONI

Potere prezzi e distribuzione in economie mercantili caratterizzate da diverse relazioni sociali

n. 25 (aprile 1984)

SANDRO GRONCHI

On investment criteria based on the internal rate of return

n. 26 (maggio 1984)

SANDRO GRONCHI

On Karmel's criterion for optimal truncation

n. 27 (giugno 1984)

SANDRO GRONCHI

On truncation "theorems"

n. 28 (ottobre 1984)

LIONELLO F. PUNZO

La matematica di Sraffa

n. 29 (dicembre 1984)

ANTONELLA STIRATI

Women's work in economic development process

n. 30 (gennaio 1985)

GIULIO CIFARELLI

The natural rate of unemployment and rational expectation hypotheses: some empirical tests.

n. 31 (gennaio 1985)

SIMONETTA BOTARELLI

Alcuni aspetti della concentrazione dei redditi nel Comune di Siena

n.32 (febbraio 1985)

FOSCO GIOVANNONI

Alcune considerazioni metodologiche sulla riforma di un sistema tributario

n. 33 (febbraio 1985)

SIMONETTA BOTARELLI

Ineguaglianza dei redditi personali a livello comunale

n. 34 (marzo 1985)

IAN STEEDMAN

Produced inputs and tax incidence theory

n. 35 (aprile 1985)

RICHARD GOODWIN

Prelude to a reconstruction of economic theory. A critique of Sraffa

n. 36 (aprile 1985)

MICHIO MORISHIMA

Classical, neoclassical and keynesian in the Leontief world

n. 37 (aprile 1985)

SECONDO TARDITI

Analisi delle politiche settoriali: prezzi e redditi nel settore agroalimentare

n. 38 (maggio 1985)

PIETRO BOD

Sui punti fissi di applicazioni isotoniche.

n. 39 (giugno 1985)

STEFANO VANNUCCI

Schemi di gioco simmetrici e stabili e teoremi di possibilità per scelte collettive.

n. 40 (luglio 1985)

RICHARD GOODWIN

The use of gradient dynamics in linear general disequilibrium theory.

n. 41 (agosto 1985)

M. MORISHIMA and T. SAWA

Expectations and the Life Span of the regime.

n. 42 (settembre 1985)

ALESSANDRO VERCELLI

Keynes, Schumpeter, Marx and the structural instability of capitalism.

n. 43 (ottobre 1985)

ALESSANDRO VERCELLI

Money and production in Schumpeter and Keynes: two dichotomies

n. 44 (novembre 1985)

MARCO LONZI

Aspetti matematici nella ricerca di condizioni di unicità per il Tasso Interno di Rendimento.

n. 45 (dicembre 1985)

NIKOLAUS K.A. LAUFER

Theoretical foundations of a new money supply hypothesis for the FRG.