

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
DIPARTIMENTO DI METODI QUANTITATIVI

Piazza San Francesco 14

I-53100 SIENA

Lonzi Marco
Riccarelli Samuele

Forma compatta per derivate e differenziali
del second'ordine
di funzioni composte e funzioni implicite.

Working Paper n° 55

Aprile 2005

1 – INTRODUZIONE

Viene presentata una forma compatta di rappresentazione e calcolo per derivate seconde di funzioni composte. Si applica tale forma al calcolo delle derivate successive di funzioni definite implicitamente mediante una equazione o un sistema di equazioni, nonché al calcolo del differenziale secondo di tale tipo di funzioni.

2 – NOTAZIONI E RICHIAMI PRELIMINARI

Lettere minuscole: x indicano valori o variabili reali, lettere maiuscole: \mathbb{X} indicano vettori o variabili vettoriali.

Dati i vettori $\mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^p$, indicheremo con $(\mathbb{X} | \mathbb{Y})$ il vettore $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$.

Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow y$ si indica con $\mathcal{D}(f(x)) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$ la derivata della funzione $y = f(x)$.

Data $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \rightarrow \mathbb{Y}$ si indica con $\mathcal{D}(f(x)) = \frac{d(\mathbb{Y})}{dx} = \mathbb{Y}'(x)$ la derivata del vettore $\mathbb{Y}(x) = f(x)$.

Data $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{X} \rightarrow y$ si indica con $\mathcal{D}(f(\mathbb{X})) = \frac{\partial y}{\partial(\mathbb{X})} = \nabla f(\mathbb{X})$ il vettore gradiente della funzione $y(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X})$.

Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ si indica con $\mathcal{D}(f(\mathbb{X})) = \frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = J_f(\mathbb{X})$ la matrice Jacobiana della funzione $\mathbb{Y}(\mathbb{X}) = f(\mathbb{X})$.

La matrice Jacobiana viene indicata anche con $\frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = \frac{\partial(y_1, y_2, \dots, y_p)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$.

Si consideri una generica funzione composta:

$$\begin{aligned} \mathbb{Y} &= f(\mathbb{X}) = f(g(\mathbb{T})), \quad \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, \quad \mathbb{T} \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y} \\ \mathbb{T} &= (t_1, t_2, \dots, t_m); \quad \mathbb{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \mathbb{Y} = (y_1, y_2, \dots, y_p) \\ \mathbb{X} &= g(\mathbb{T}) = (g_1(\mathbb{T}), \dots, g_n(\mathbb{T})) = (g_1(t_1, \dots, t_m), \dots, g_n(t_1, \dots, t_m)); \\ \mathbb{Y} &= f(\mathbb{X}) = (f_1(\mathbb{X}), \dots, f_p(\mathbb{X})) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_p(x_1, \dots, x_n)). \end{aligned}$$

Nel caso $m = n = p = 1$: $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} y, y = f(g(t))$

risulta $\mathcal{D}(f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.

Nel caso $m = n = 1, p > 1 : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, t \xrightarrow{g} x \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(t))$
 risulta: $\mathcal{D}(f(g(t))) = \frac{d(\mathbb{Y}(x(t)))}{dt} = \mathbb{Y}'(x(t)) \cdot x'(t)$.

Nel caso $m = p = 1, n > 1 : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} y, y = f(g(t))$
 risulta: $\mathcal{D}(f(g(t))) = \frac{dy(\mathbb{X}(t))}{dt} = \nabla f(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}'(t)$.

Nel caso $m = 1, n, p > 1 : \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(t))$
 risulta: $\mathcal{D}(f(g(t))) = \frac{d(\mathbb{Y}(\mathbb{X}(t)))}{dt} = J_f(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}'(t)$.

Nel caso $m, n, p > 1 : \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, \mathbb{T} \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(\mathbb{T}))$
 risulta: $\mathcal{D}(f(g(\mathbb{T}))) = \frac{\partial(\mathbb{Y}(\mathbb{X}(\mathbb{T})))}{\partial(\mathbb{T})} = J_{f(g)}(\mathbb{T}) = J_f(\mathbb{X}(\mathbb{T})) \cdot J_g(\mathbb{T})$.

3 – DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI COMPOSTE

Sia $\mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} = (x_1, x_2) \xrightarrow{f} y, y = f(g(t))$.

Sia g derivabile due volte e sia f differenziabile due volte.

Da $\frac{dy}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt}$ risulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{d^2x_1}{dt^2} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \cdot \frac{dx_2}{dt} \right) \cdot \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{d^2x_2}{dt^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \left(\frac{dx_1}{dt} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{dx_1}{dt} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \left(\frac{dx_2}{dt} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{d^2x_2}{dt^2}. \end{aligned}$$

In notazione abbreviata l'uguaglianza precedente può essere scritta come:

$$y'' = f''_{11} (x'_1)^2 + 2 f''_{12} x'_1 x'_2 + f''_{22} (x'_2)^2 + f'_1 x''_1 + f'_2 x''_2 \text{ ed anche:}$$

$$y'' = y''_{11} (x'_1)^2 + 2 y''_{12} x'_1 x'_2 + y''_{22} (x'_2)^2 + y'_1 x''_1 + y'_2 x''_2 .$$

$$\text{Da } \mathbb{X} = (x_1, x_2) \text{ segue } \mathbb{X}' = \frac{d(\mathbb{X})}{dt} = (x'_1, x'_2) \text{ e } \mathbb{X}'' = \frac{d^2(\mathbb{X})}{dt^2} = (x''_1, x''_2),$$

ed essendo $\nabla f(x_1, x_2) = (f'_1, f'_2) = (y'_1, y'_2)$ e

$$\mathbb{H}(f(x_1, x_2)) = \begin{vmatrix} y''_{11} & y''_{12} \\ y''_{12} & y''_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{12} & f''_{22} \end{vmatrix}, \text{ la precedente uguaglianza pu\`o essere}$$

espressa anche come:

$$y'' = \mathbb{X}'(t) \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t))) \cdot (\mathbb{X}'(t))^T + \nabla f(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}''(t),$$

dove $\mathbb{X}'(t), \mathbb{X}''(t), \nabla f(\mathbb{X}(t)) \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t)))$ \u00e8 una matrice 2×2 .

$$\text{Sia } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} y, y = f(g(t)).$$

Sia g derivabile due volte e sia f differenziabile due volte.

Con calcoli analoghi ai precedenti si ottiene ancora:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \mathbb{X}'(t) \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t))) \cdot (\mathbb{X}'(t))^T + \nabla f(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}''(t),$$

dove $\mathbb{X}'(t), \mathbb{X}''(t), \nabla f(\mathbb{X}(t)) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}(f(\mathbb{X}(t)))$ \u00e8 una matrice $n \times n$.

$$\text{Sia } \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, t \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(t)).$$

Sia g derivabile due volte e sia f differenziabile due volte.

Con calcoli analoghi ai precedenti si ottengono p uguaglianze:

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = \mathbb{X}'(t) \cdot \mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(t))) \cdot (\mathbb{X}'(t))^T + \nabla f_i(\mathbb{X}(t)) \cdot \mathbb{X}''(t), 1 \leq i \leq p$$

dove $\mathbb{X}'(t), \mathbb{X}''(t), \nabla f(\mathbb{X}(t)) \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(t)))$ \u00e8 una matrice $n \times n$.

$$\text{Sia } \mathbb{R}^m \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p, \mathbb{T} \xrightarrow{g} \mathbb{X} \xrightarrow{f} \mathbb{Y}, \mathbb{Y} = f(g(\mathbb{T})).$$

Possiamo generalizzare quanto visto con il:

Teorema 1 : Date le due funzioni:

$$g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n, (t_1, t_2, \dots, t_m) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (y_1, y_2, \dots, y_p), \text{ ovvero:}$$

$$\mathbb{Y} = f(\mathbb{X}(\mathbb{T})) = (f_1(\mathbb{X}(\mathbb{T})), \dots, f_p(\mathbb{X}(\mathbb{T}))) = f(g(\mathbb{T}))$$

ambidue differenziabili due volte, vale la seguente formula generale:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial t_j \partial t_k} = \frac{\partial \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j} \cdot \mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T}))) \cdot \left(\frac{\partial \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_k} \right)^T + \nabla f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T})) \cdot \frac{\partial^2 \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j \partial t_k},$$

$1 \leq i \leq p, 1 \leq j, k \leq m$, costituita da $p \cdot \frac{m^2 + m}{2}$ uguaglianze, dove:

$$\frac{\partial \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j}, \frac{\partial^2 \mathbb{X}(\mathbb{T})}{\partial t_j \partial t_k}, \nabla f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T})) \in \mathbb{R}^n \text{ e } \mathbb{H}(f_i(\mathbb{X}(\mathbb{T}))) \text{ è una matrice } n \times n.$$

4 – DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE DA UNA EQUAZIONE

I Caso: Equazione $f(x, y) = k$: funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Esistenza e proprietà della funzione implicita sono stabilite nel seguente:

Teorema 2 (U. Dini): Sia $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua con derivata f'_y continua in $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$; sia $f(x_0, y_0) = k$ e sia $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Allora esistono un intorno $\mathfrak{J}(x_0)$ e un'unica funzione continua $y = y(x)$, tale che $y_0 = y(x_0)$ e $f(x, y(x)) = k, \forall x \in \mathfrak{J}(x_0)$.

Se poi anche f'_x è continua in \mathbb{A} , allora $y(x)$ è derivabile in $\mathfrak{J}(x_0)$ e risulta:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = -\frac{f'_x}{f'_y}, \quad \forall x \in \mathfrak{J}(x_0).$$

La funzione $y'(x)$ infine è continua $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0)$.

Funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Derivata prima

Posto $w = f(x, y) = k$, sia $f \in C^1(\mathbb{A}), \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Nell'ipotesi $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$ sia definita implicitamente $y = y(x)$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x \rightarrow (x, y(x)) \xrightarrow{f} w = f(x, y) = k \text{ si ha:}$$

$$\frac{dw}{dx} = \nabla f(x, y) \cdot \frac{d(x, y)}{dx} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dx}, \frac{dy}{dx} \right) = f'_x \cdot 1 + f'_y \cdot y'(x) = 0,$$

e quindi si ricava:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = - \frac{f'_x}{f'_y}.$$

Funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: Derivata seconda

Nell'ipotesi $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, x \rightarrow (x, y(x)) \xrightarrow{f} w = f(x, y) = k$$

e da $\frac{dw}{dx} = f'_x + f'_y \cdot y' = 0$, derivando ancora rispetto a x si ottiene:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot y' + f''_{yy} \cdot (y')^2 + f'_y \cdot y'' = 0 \text{ da cui:}$$

$$y'' = - \frac{f''_{xx} + 2f''_{xy} y' + f''_{yy} (y')^2}{f'_y}.$$

Applicando il Teorema 1, da $\mathbb{X} = \mathbb{X}(x) = (x, y)$, da cui $\mathbb{X}'(x) = (1, y')$ e

$\mathbb{X}''(x) = (0, y'')$, si ha:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \mathbb{X}'(x) \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}(x))) \cdot (\mathbb{X}'(x))^T + \nabla f(\mathbb{X}(x)) \cdot \mathbb{X}''(x) = 0 \text{ da cui:}$$

$$\|1 \quad y'\| \cdot \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} \\ f''_{12} & f''_{22} \end{vmatrix} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 \\ y' \end{matrix} \right\| + (f'_x, f'_y) \cdot (0, y'') = 0 \text{ da cui si ricava:}$$

$$y'' = - \frac{f''_{xx} + 2f''_{xy} y' + f''_{yy} (y')^2}{f'_y}.$$

II Caso: Equazione $f(x_1, x_2, y) = k$: funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Da $f(\mathbb{X}|y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, sia $f(\mathbb{X}_0|y_0) = k$ e $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$, con $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$ per cui, per il Teorema del Dini, risulta definita implicitamente $y = y(\mathbb{X})$, $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ in $\mathfrak{J}(\mathbb{X}_0)$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: Derivata prima

Posto $w = f(\mathbb{X}|y) = k$, sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$ sia definita implicitamente $y = y(\mathbb{X})$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|y) = k,$$

posto $y'_{x_i} = y'_i$, $f'_{x_i} = f'_i$, risulta:

$$\frac{\partial w}{\partial(\mathbb{X})} = \frac{\partial w}{\partial(\mathbb{X}|y)} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial(\mathbb{X})} = 0 \text{ da cui otteniamo:}$$

$$\left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial w}{\partial x_1} & \frac{\partial w}{\partial x_2} \end{array} \right\| = \nabla f(\mathbb{X}|y) \cdot \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y'_1 & y'_2 \end{array} \right\| = 0 \text{ ovvero:}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_1} = (f'_1, f'_2, f'_y) \cdot (1, 0, y'_1) = f'_1 + f'_y \cdot y'_1 = 0, \text{ e}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = (f'_1, f'_2, f'_y) \cdot (0, 1, y'_2) = f'_2 + f'_y \cdot y'_2 = 0,$$

dalle quali otteniamo: $(y'_1, y'_2) = \left(-\frac{f'_1}{f'_y}, -\frac{f'_2}{f'_y} \right)$ e quindi:

$$\nabla y(\mathbb{X}) = \left(-\frac{f'_1(\mathbb{X}|y)}{f'_y(\mathbb{X}|y)}, -\frac{f'_2(\mathbb{X}|y)}{f'_y(\mathbb{X}|y)} \right).$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}: \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|y) = k,$$

posto: $y''_{x_i x_j} = y''_{ij}$, $f''_{x_i x_j} = f''_{ij}$ ed essendo:

$$\frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_1} = (1, 0, y'_1), \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_2} = (0, 1, y'_2) \text{ e } \frac{\partial^2(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i \partial x_j} = (0, 0, y''_{ij}),$$

applicando il Teorema 1 otteniamo:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_j} \right)^T + (f'_1, f'_2, f'_y) \cdot (0, 0, y''_{ij}) = 0$$

che permette di ricavare le derivate parziali seconde:

$$y''_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{f'_y} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_j} \right)^T, \quad 1 \leq i, j \leq 2.$$

Esplicitando:

$$y''_{11} = -\frac{1}{f'_y} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{1y} \\ f''_{12} & f''_{22} & f''_{2y} \\ f''_{1y} & f''_{2y} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ y'_1 \end{vmatrix},$$

$$y''_{12} = -\frac{1}{f'_y} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y'_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{1y} \\ f''_{12} & f''_{22} & f''_{2y} \\ f''_{1y} & f''_{2y} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ y'_2 \end{vmatrix},$$

$$y''_{22} = -\frac{1}{f'_y} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ y'_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f''_{11} & f''_{12} & f''_{1y} \\ f''_{12} & f''_{22} & f''_{2y} \\ f''_{1y} & f''_{2y} & f''_{yy} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ y'_2 \end{vmatrix}.$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}: \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|y) = k,$$

differenziando si ha:

$$dw = f'_1 dx_1 + f'_2 dx_2 + f'_y dy = 0, \text{ e da questa ricaviamo:}$$

$$dy = -\frac{f'_1}{f'_y} dx_1 - \frac{f'_2}{f'_y} dx_2, \text{ nell'ipotesi } f'_y \neq 0.$$

Differenziando nuovamente otteniamo:

$$d^2w = d^2f(\mathbb{X}|y) + f'_y d^2y = 0, \text{ da cui ricaviamo } d^2y = -\frac{d^2f(\mathbb{X}|y)}{f'_y}.$$

III Caso: Equazione $f(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = k$: funzione implicita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Da $f(\mathbb{X}|y) = k$, $k \in \mathbb{R}$, $\mathbb{X} \in \mathbb{R}^n$, sia $f(\mathbb{X}_0|y_0) = k$, sia f derivabile con derivate continue con $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$, per cui risulta definita implicitamente $y = y(\mathbb{X}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Derivate prime

Posto $w = f(\mathbb{X}|y) = k$, sia $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$ sia definita implicitamente $y = y(\mathbb{X})$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|y) = k.$$

derivando rispetto alla generica variabile x_i si ha:

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = \nabla f(\mathbb{X}|y) \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = f'_i + f'_y \cdot \frac{\partial y}{\partial x_i} = 0,$$

da cui ricaviamo: $\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{f'_i}{f'_y}$, $1 \leq i \leq n$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|y) = k,$$

derivando si ha:

$$\frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i} = (0, \dots, 1_i, \dots, 0, y'_i),$$

ovvero un vettore avente le prime n componenti nulle eccettuata l' i -esima uguale a 1, e la $(n+1)$ -esima uguale a y'_i , dalle quali otteniamo anche:

$$\frac{\partial^2(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i \partial x_j} = (0, \dots, 0, y''_{ij}), \text{ e quindi, applicando il Teorema 1, avremo:}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_j} \right)^T + (f'_1, \dots, f'_n, f'_y) \cdot (0, \dots, 0, y''_{ij}) = 0$$

che permette di ricavare le derivate parziali seconde:

$$y''_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{1}{f'_y} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|y)) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|y)}{\partial x_j} \right)^T, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $f'_y(\mathbb{X}_0|y_0) \neq 0$, sia $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{f} \mathbb{R} : \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|y) \xrightarrow{f} w = f(\mathbb{X}|y) = k \text{ differenziando otteniamo:}$$

$dw = f'_1 dx_1 + f'_2 dx_2 + \dots + f'_n dx_n + f'_y dy = 0$, da cui ricaviamo dy , e differenziando una seconda volta, otteniamo :

$$d^2 f(\mathbb{X}|y) + f'_y d^2 y = 0 \text{ da cui ricaviamo } d^2 y = - \frac{d^2 f(\mathbb{X}|y)}{f'_y}.$$

5 – DERIVATE SECONDE DELLE FUNZIONI DEFINITE IMPLICITAMENTE
DA UN SISTEMA DI EQUAZIONI

I Caso: Sistema $\begin{cases} f(x, y_1, y_2) = k_1 \\ g(x, y_1, y_2) = k_2 \end{cases}$: **funzione implicita** $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

Dato il sistema: $\begin{cases} f(x, \mathbb{Y}) = k_1 \\ g(x, \mathbb{Y}) = k_2 \end{cases}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, vale il:

Teorema 3 : Siano f e g , $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$, sia $(x_0 | \mathbb{Y}_0)$ un punto che soddisfa il sistema, e risulti infine $\left| \frac{\partial(f, g)(x_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$.

Allora esiste un intorno $\mathfrak{J}(x_0)$ nel quale è definita una funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightarrow \mathbb{Y}(x)$, che risulta continua e derivabile $\forall x \in \mathfrak{J}(x_0)$.

Funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: Derivate prime

Posto $\begin{cases} w_1 = f(x, \mathbb{Y}) = k_1 \\ w_2 = g(x, \mathbb{Y}) = k_2 \end{cases}$, siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(f, g)(x_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$ sia definita implicitamente $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(x)$.

Dalle composizioni di funzioni:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad x \rightarrow (x | \mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(x | \mathbb{Y}) = k_1, \text{ e}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad x \rightarrow (x | \mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(x | \mathbb{Y}) = k_2,$$

derivando rispetto a x , essendo w_1 e w_2 costanti, otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{dw_1}{dx} = \nabla f(x|Y) \cdot \frac{\partial(x|Y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{dw_2}{dx} = \nabla g(x|Y) \cdot \frac{\partial(x|Y)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad \text{che risulta un sistema lineare di due equazioni}$$

nelle due incognite y'_1 e y'_2 , e può essere scritto in forma matriciale come:

$$\begin{vmatrix} f'_{y_1} & f'_{y_2} \\ g'_{y_1} & g'_{y_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f'_x \\ g'_x \end{vmatrix},$$

ed anche, utilizzando le matrici Jacobiane, come:

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x)} = - \frac{\partial(f, g)}{\partial(x)}.$$

Applicando il teorema di Cramer avremo la soluzione:

$$\begin{vmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x)} = - \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(x)} = - \begin{vmatrix} f'_{y_1} & f'_{y_2} \\ g'_{y_1} & g'_{y_2} \end{vmatrix}^{-1} \cdot \begin{vmatrix} f'_x \\ g'_x \end{vmatrix}.$$

Funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(f, g)(x_0|Y_0)}{\partial(Y)} \right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalle composizioni di funzioni:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad x \rightarrow (x|Y) \xrightarrow{f} w_1 = f(x|Y) = k_1, \quad \mathbf{e}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad x \rightarrow (x|Y) \xrightarrow{g} w_2 = g(x|Y) = k_2,$$

derivando rispetto a x si ha:

$$\frac{d(x|Y)}{dx} = (1, y'_1, y'_2) \quad \mathbf{e} \quad \frac{d^2(x|Y)}{dx^2} = (0, y''_1, y''_2),$$

dalle quali otteniamo, per il Teorema 1:

$$\frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d(x|Y)}{dx} \cdot \mathbb{H}(f(x|Y)) \cdot \left(\frac{d(x|Y)}{dx} \right)^T + (f'_x, f'_{y_1}, f'_{y_2}) \cdot (0, y''_1, y''_2) = 0 \quad \mathbf{e}$$

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = \frac{d(x|Y)}{dx} \cdot \mathbb{H}(g(x|Y)) \cdot \left(\frac{d(x|Y)}{dx} \right)^T + (g'_x, g'_{y_1}, g'_{y_2}) \cdot (0, y''_1, y''_2) = 0$$

ovvero il sistema, nelle incognite y''_1 e y''_2 :

$$\begin{cases} f'_{y_1} y''_1 + f'_{y_2} y''_2 = - \frac{d(x|Y)}{dx} \cdot \mathbb{H}(f(x|Y)) \cdot \left(\frac{d(x|Y)}{dx} \right)^T \\ g'_{y_1} y''_1 + g'_{y_2} y''_2 = - \frac{d(x|Y)}{dx} \cdot \mathbb{H}(g(x|Y)) \cdot \left(\frac{d(x|Y)}{dx} \right)^T \end{cases}$$

la cui soluzione può essere formalmente espressa mediante la:

$$\left\| \begin{matrix} y_1'' \\ y_2'' \end{matrix} \right\| = - \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} \frac{d(x|Y)}{dx} \cdot \mathbb{H}(f(x|Y)) \cdot \left(\frac{d(x|Y)}{dx} \right)^T \\ \frac{d(x|Y)}{dx} \cdot \mathbb{H}(g(x|Y)) \cdot \left(\frac{d(x|Y)}{dx} \right)^T \end{matrix} \right\|.$$

Funzione implicita $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(f, g)(x_0|Y_0)}{\partial(Y)} \right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^3$.

Dalle composizioni di funzioni:

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad x \rightarrow (x|Y) \xrightarrow{f} w_1 = f(x|Y) = k_1, \quad \text{e}$$

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad x \rightarrow (x|Y) \xrightarrow{g} w_2 = g(x|Y) = k_2,$$

differenziando una prima volta otteniamo:

$$\begin{cases} dw_1 = f'_x dx + f'_{y_1} dy_1 + f'_{y_2} dy_2 = 0 \\ dw_2 = g'_x dx + g'_{y_1} dy_1 + g'_{y_2} dy_2 = 0 \end{cases}, \quad \text{ovvero un sistema lineare di due equazioni}$$

nelle due incognite dy_1 e dy_2 che ha per soluzione:

$$\left\| \begin{matrix} dy_1 \\ dy_2 \end{matrix} \right\| = - \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} f'_x dx \\ g'_x dx \end{matrix} \right\|.$$

Differenziando ancora, analogamente al caso di una sola equazione, avremo:

mo:

$$\begin{cases} d^2 w_1 = d^2 f(x, y_1, y_2) + f'_{y_1} d^2 y_1 + f'_{y_2} d^2 y_2 = 0 \\ d^2 w_2 = d^2 g(x, y_1, y_2) + g'_{y_1} d^2 y_1 + g'_{y_2} d^2 y_2 = 0 \end{cases},$$

ovvero un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite $d^2 y_1$ e $d^2 y_2$ che ha per soluzione:

$$\left\| \begin{matrix} d^2 y_1 \\ d^2 y_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} y_1''(dx)^2 \\ y_2''(dx)^2 \end{matrix} \right\| = - \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|^{-1} \cdot \left\| \begin{matrix} d^2 f(x|Y) \\ d^2 g(x|Y) \end{matrix} \right\|.$$

II Caso: Sistema $\begin{cases} f(x_1, x_2, y_1, y_2) = k_1 \\ g(x_1, x_2, y_1, y_2) = k_2 \end{cases}$: **funzione implicita** $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

Dato il sistema $\begin{cases} f(\mathbb{X}|Y) = k_1 \\ g(\mathbb{X}|Y) = k_2 \end{cases}$, $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, se il punto $(\mathbb{X}_0|Y_0)$ lo soddisfa, se f e g sono entrambi derivabili con derivate continue, se

$\left| \frac{\partial(f, g)(\mathbb{X}_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$ il Teorema del Dini assicura l'esistenza, in un intorno del punto \mathbb{X}_0 , di una funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}(\mathbb{X})$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: Derivate prime

Posto $\begin{cases} w_1 = f(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) = k_1 \\ w_2 = g(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) = k_2 \end{cases}$, siano $f, g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(f, g)(\mathbb{X}_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$ sia definita implicitamente $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(\mathbb{X})$.

Dalle composizioni di funzioni:

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) = k_1, \quad \text{e}$$

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) = k_2$$

derivando rispetto a x_1 e x_2 , otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \nabla f(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \cdot \frac{\partial(\mathbb{X} | \mathbb{Y})}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = \nabla g(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \cdot \frac{\partial(\mathbb{X} | \mathbb{Y})}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial w_1}{\partial x_2} = \nabla f(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \cdot \frac{\partial(\mathbb{X} | \mathbb{Y})}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial w_2}{\partial x_2} = \nabla g(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \cdot \frac{\partial(\mathbb{X} | \mathbb{Y})}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \text{che può essere scritto come:}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial f}{\partial y_2} \\ \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{vmatrix} \quad \text{e, mediante le matrici Ja-}$$

cobiane, come: $\frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \cdot \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = - \frac{\partial(f, g)}{\partial(x_1, x_2)}$, che ha per soluzione:

$$\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)} = - \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial(f, g)}{\partial(x_1, x_2)}.$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(f, g)(\mathbb{X}_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Dalle composizioni di funzioni:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(\mathbb{X}|\mathbb{Y}) = k_1, \text{ e} \\ \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(\mathbb{X}|\mathbb{Y}) = k_2, \\ \text{essendo } \frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_1} &= \left(1, 0, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) \text{ e } \frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_2} = \left(0, 1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right), \end{aligned}$$

derivando nuovamente si ha:

$$\frac{\partial^2(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_j \partial x_i} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_i \partial x_j}\right), \text{ dalle quali, applicando il Teorema 1, otteniamo 4 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite, che si riducono a 3 sistemi di 2 equazioni in 2 incognite dato che } \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_j \partial x_i} :$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\mathbb{Y})) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^T + \nabla f(\mathbb{X}|\mathbb{Y}) \cdot \frac{\partial^2(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(g(\mathbb{X}|\mathbb{Y})) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^T + \nabla g(\mathbb{X}|\mathbb{Y}) \cdot \frac{\partial^2(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i \partial x_j} = 0 \end{cases},$$

$1 \leq i, j \leq 2$, le cui soluzioni sono esprimibili in forma compatta come:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_i \partial x_j} \end{vmatrix} = - \left\| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_1, y_2)} \right\|^{-1} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(f(\mathbb{X}|\mathbb{Y})) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^T \\ \frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_i} \cdot \mathbb{H}(g(\mathbb{X}|\mathbb{Y})) \cdot \left(\frac{\partial(\mathbb{X}|\mathbb{Y})}{\partial x_j}\right)^T \end{vmatrix},$$

$1 \leq i, j \leq 2$.

Funzione implicita $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$: Differenziali I° e II°

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(f, g)(\mathbb{X}_0|\mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$, siano $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^4$.

Dalle composizioni di funzioni:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|\mathbb{Y}) \xrightarrow{f} w_1 = f(\mathbb{X}|\mathbb{Y}) = k_1, \text{ e} \\ \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^4 \xrightarrow{g} \mathbb{R}, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X}|\mathbb{Y}) \xrightarrow{g} w_2 = g(\mathbb{X}|\mathbb{Y}) = k_2, \end{aligned}$$

differenziando una volta si ha:

$$\begin{cases} dw_1 = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + f'_{y_1} dy_1 + f'_{y_2} dy_2 = 0 \\ dw_2 = g'_{x_1} dx_1 + g'_{x_2} dx_2 + g'_{y_1} dy_1 + g'_{y_2} dy_2 = 0 \end{cases},$$

ovvero un sistema lineare nelle due incognite dy_1 e dy_2 che ha per soluzione:

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(\mathbb{W})(\mathbb{X}_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$ sia definita implicitamente $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}(\mathbb{X})$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \xrightarrow{f} \mathbb{W} = f(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) = \text{cost.}, \text{ otteniamo:}$$

$$\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} = \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X} | \mathbb{Y})} \cdot \frac{\partial(\mathbb{X} | \mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = 0.$$

Il secondo termine può essere riscritto come:

$$\left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} \right\| \cdot \left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \right\| \cdot \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial(\mathbb{X})}{\partial(\mathbb{X})} \\ - \\ \frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} \end{array} \right\| = 0.$$

La matrice di sinistra è una matrice $(m, n + m)$ divisa in due blocchi, il primo (m, n) ed il secondo (m, m) ; la matrice di destra è una matrice $(n + m, n)$ divisa in due blocchi, il superiore (n, n) e l'inferiore (m, n) .

Operando per blocchi, dall'uguaglianza otteniamo:

$$\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})} \cdot \mathbb{I}_n + \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \cdot \frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = 0$$

da cui poi:

$$\frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \cdot \frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = - \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})}$$

e quindi:

$$\frac{\partial(\mathbb{Y})}{\partial(\mathbb{X})} = - \left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \right\|^{-1} \cdot \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{X})}.$$

Funzione implicita $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$: Derivate seconde

Nell'ipotesi $\left| \frac{\partial(\mathbb{W})(\mathbb{X}_0 | \mathbb{Y}_0)}{\partial(\mathbb{Y})} \right| \neq 0$, siano $f_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{A})$, $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

Dalla composizione di funzioni:

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m, \quad \mathbb{X} \rightarrow (\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \xrightarrow{f} \mathbb{W} = f(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) = \text{cost.},$$

generalizzando quanto visto nei casi precedenti, applicando il Teorema 1, otteniamo

$\frac{n^2 + n}{2}$ sistemi di m equazioni in m incognite, le cui soluzioni sono esprimibili in

forma compatta mediante le:

$$\begin{pmatrix} d^2 w_1 \\ \dots \\ d^2 w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^2 f_1(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \\ \dots \\ d^2 f_m(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \end{pmatrix} + \left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \right\| \cdot \begin{pmatrix} d^2 y_1 \\ \dots \\ d^2 y_m \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

che ha per soluzione:

$$\begin{pmatrix} d^2 y_1 \\ \dots \\ d^2 y_m \end{pmatrix} = - \left\| \frac{\partial(\mathbb{W})}{\partial(\mathbb{Y})} \right\|^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d^2 f_1(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \\ \dots \\ d^2 f_m(\mathbb{X} | \mathbb{Y}) \end{pmatrix}.$$