

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
FACOLTA' DI SCIENZE ECONOMICHE E BANCARIE
ISTITUTO DI ECONOMIA

QUADERNI DELL'ISTITUTO DI ECONOMIA
N. 6

NERI SALVADORI
MUTAMENTO DEI METODI DI PRODUZIONE CONGIUNTA

SIENA, DICEMBRE 1979

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI SIENA
FACOLTA' DI SCIENZE ECONOMICHE E BANCARIE
ISTITUTO DI ECONOMIA

ELENCO DEI QUADERNI PUBBLICATI

1. MASSIMO DI MATTEO: ALCUNE CONSIDERAZIONI SUI CONCETTI DI LAVORO PRODUTTIVO E IMPRODUTTIVO
2. MARIA L. RUIZ: MERCATI OLIGOPOLISTICI E SCAMBI INTERNAZIONALI DI MANUFATTI. ALCUNE IPOTESI E UN'APPLICAZIONE ALL'ITALIA.
3. DOMENICO MARIO NUTI: LE CONTRADDIZIONI DELLE ECONOMIE SOCIALISTE: UNA INTERPRETAZIONE MARXISTA.
4. ALESSANDRO VERCELLI: EQUILIBRIO E DINAMICA DEL SISTEMA ECONOMICO - SEMANTICA DEI LINGUAGGI FORMALIZZATI E MODELLO KEYNESIANO
5. A. RONCAGLIA - M. TONVERONACHI: MONETARISTI E NEOKEYNESIANI: DUE SCUOLE O UNA?

I N D I C E

1. Introduzione	pag.	1
2. Una definizione di sistema di produzione	"	2
3. Una definizione di sistema di produzione più profittevole	"	4
4. Teoremi sui concetti introdotti	"	9
5. Alcune difficoltà per la teoria di Sraffa	"	18
6. Analisi e riformulazione delle definizioni date	"	19
7. Un modello generalizzato di von Neuman	"	22
8. Un'ulteriore precisazione	"	26
9. Conclusione	"	27
Appendici:		
A)	"	28
B)	"	30
C)	"	32
D)	"	34
E)	"	36
F)	"	38
Bibliografia	"	40

Mutamento dei metodi di produzione e produzione congiunta*

di
Neri Salvadori ++

* Desidero ringraziare i partecipanti ai seminari da me tenuti presso il C.N.R. (Roma), gli Istituti di Economia della Facoltà di Scienze Economiche e Bancarie dell'Università di Siena e delle Facoltà di Economia e Commercio delle Università di Napoli e Modena sugli argomenti di questo lavoro. Desidero ringraziare, inoltre, Augusto Graziani, Bruno Jossa, Carlo Panico e, in modo particolare, Lilli Basile che hanno letto e commentato una precedente stesura. Rimane solo mia, ovviamente, la responsabilità di eventuali errori.

++ Dell'Università degli Studi di Napoli.

1. *Introduzione.* Nella parte I di *Produzione di merci a mezzo di merci*, Sraffa prende in considerazione un dato sistema economico supposto a produzione singola e in posizione di lungo periodo - così che prezzi, saggio di profitto e saggio di salario sono uniformi - e analizza i movimenti virtuali tra prezzi e variabili distributive assumendo ogni altra cosa tra cui le quantità - come un dato¹.

Nella parte II, Sraffa tenta di riproporre la stessa operazione rimuovendo l'assunzione di produzione singola e introducendo la possibilità che qualche industria produca più merci congiuntamente.

Infine, nella parte III, Sraffa tratta il problema della scelta, operata dalla concorrenza, del sistema di produzione più profittevole: egli, tuttavia, tratta in modo esauritivo solo il caso di produzione singola.

Scopo di questo lavoro è analizzare il problema della scelta del sistema di produzione più profittevole nel caso generale di produzione congiunta². Tale analisi individua alcune difficoltà nella teoria di Sraffa e giunge ad escludere la possibilità di considerare - almeno nel caso di pro-

1. Per una simile interpretazione vedi /13/ p.27: "Si prende in esame la situazione di un dato sistema economico quale risulta da una 'fotografia' eseguita in un dato istante: in tal modo tutte le variabili economiche che non sono oggetto dell'analisi possono essere considerate date, ed il teorico può concentrare la propria attenzione sui movimenti virtuali di alcune variabili e sulle relazioni che intercorrono fra di esse, che risultano come 'isolate in vacuo'. Nel caso di *Produzione di merci*, la scelta è caduta sulle relazioni che intercorrono fra prezzi di produzione e variabili distributive, saggio del salario e saggio del profitto: tutto il resto (tecnologia, livelli di produzione, distribuzione delle imprese fra le varie industrie) è assunto come un dato del problema".

2. Tale problema nel caso di produzione singola è stato studiato, oltre che da Sraffa/19/, da Garegnani /3/ e da Levhari /6/; nel caso cosiddetto di "produzione singola con capitale fisso" è stato studiato da Baldone/1/, Schefold/15/, Varri/26/; nel caso di "produzione singola con risorse scarse" da Quadrio Curzio/12/ e da Montani/8/; in un particolare caso di produzione congiunta da Schefold/16/.

duzione congiunta - la determinazione dei prezzi come problema separabile dalla determinazione delle quantità.

Inizieremo col dare le definizioni di "sistema produttivo" (12) e di "sistema produttivo più profittevole" (13) usate da Sraffa, per poi enunciare e dimostrare alcuni teoremi su tali concetti (14); grazie a tali teoremi si perverrà ad individuare alcune difficoltà per la teoria di Sraffa (15) che consentono una critica delle definizioni date e la formulazione di definizioni alternative (16), che saranno poi commentate (17); forniremo, infine, alcune precisazioni (18) prima di trarre le conclusioni del lavoro (19).

Intendiamo precisare, inoltre, che in questo lavoro si assumerà esplicitamente che i rendimenti di scala siano costanti: tale assunzione, infatti, come ha recentemente chiarito Ian Steedman /18/, è implicitamente accolta nella parte III del libro di Sraffa, anche se la questione dei rendimenti di scala è, senza ambiguità, irrilevante nelle prime due parti di *Produzione di merci a mezzo di merci*.

2. Una definizione di sistema di produzione. Nella parte I di *Produzione di merci a mezzo di merci* Sraffa non dà una definizione formale di sistema di produzione³ e la comprensione di tale concetto viene lasciata all'intuizione del lettore. Non sorge, tuttavia, alcuna difficoltà interpretativa. Infatti, nel caso di produzione singola con ogni metodo⁴ si produce una ed una sola merce, per cui se k sono le merci coinvolte nella produzione almeno k de-

3. Una definizione formale di sistema di produzione è data da Sraffa solo dopo aver introdotto la "terra"; Cfr. /19/190: "Chiameremo (...) sistema un gruppo di industrie o metodi di produzione che siano di numero uguale non più, come prima, soltanto al numero delle merci prodotte, bensì al numero di esse più il numero di quei mezzi di produzione che non si trovano fra i prodotti".

4. Si adotteranno i termini "metodo di produzione" (o, più brevemente "metodo") o "industrie" (come sinonimi) al posto di "processo di produzione" o "attività", più usati nella letteratura recente, perchè sono i termini usati da Sraffa/19/.

von/essere i metodi di produzione attivati, inoltre k metodi determinano k vincoli tra i $k-1$ prezzi relativi, il saggio di salario ed il saggio di profitto, per cui è possibile determinare i prezzi ed una delle variabili distributive in funzione dell'altra.

Nell'introdurre la produzione congiunta (/19/ § 50), Sraffa si trova di fronte ad una difficoltà: poichè con qualche metodo si produce più di una merce, è possibile attivare un numero di metodi di produzione minore del numero delle merci coinvolte nella produzione. "Le condizioni non sarebbero più sufficienti per determinare i prezzi. Vi sarebbero più prezzi che non vi siano industrie, e quindi più incognite che non vi siano equazioni per determinarle" (/19/ § 50). Sraffa supera la difficoltà menzionata con una assunzione: egli assume "che il numero delle industrie sia uguale al numero delle merci" (/19/ § 50). Tale assunzione è necessaria per l'analisi di Sraffa in quanto egli desidera mantenere distante il problema della determinazione dei prezzi dal problema della determinazione delle quantità, viceversa se il numero delle industrie (o metodi di produzione) fosse minore del numero delle merci, sarebbero indispensabili ulteriori informazioni per poter determinare i prezzi.

Esiste un altro problema che non si pone nel caso di produzione singola.

Nel caso di produzione congiunta - anche se i rendimenti di scala sono costanti ed il numero dei metodi attivati è uguale al numero delle merci coinvolte nella produzione - non è sempre possibile attivare i vari metodi in dimensioni tali da soddisfare qualsiasi tipo di "richieste per l'uso". Che Sraffa poi non sia indifferente a tale problema, lo si desume dal brano seguente.

"Si può notare incidentalmente che, poichè le proporzioni nelle quali le due merci sono prodotte con uno dei metodi saranno in generale differenti da quelle in cui esse sono richieste per l'uso, l'esistenza di due metodi per produrre in diverse proporzioni sarà necessaria per ottenere la proporzione voluta dei due prodotti combinando opportunamente i due metodi" (/19/p.55n)

Se Sraffa non dà rilievo al problema appena sollevato ciò è dovuto, ci sembra, al tipo di "esercizio" che egli sta svolgendo⁵. Nelle parti I e II, come già detto, Sraffa assume un sistema economico dato in posizione di lungo periodo. L' "esercizio" proposto consiste nel valutare le variazioni dei prezzi e di una delle variabili distributive in funzione dell'altra, postulando che non vi sia "alcun cambiamento nel volume della produzione e neppure (...) alcun cambiamento nelle proporzioni in cui i diversi mezzi di produzione sono usati in ciascuna industria" (/19/ p.iii). Pertanto la soddisfazione delle "richieste per l'uso" è implicitamente assunta da Sraffa.

Tuttavia, ci sembra opportuno ai nostri fini rendere esplicita la assunzione di soddisfazione delle richieste per l'uso, in quanto, trattando il problema del mutamento dei metodi di produzione, non ha senso introdurre un metodo di produzione se, nella situazione che si verrebbe così a determinare, le richieste per l'uso non fossero soddisfatte.

In conclusione ci sembra di poter dare la seguente definizione.

Definizione 2.1. Chiameremo sistema di produzione secondo Sraffa un insieme di metodi di produzione, il cui numero sia uguale al numero delle merci coinvolte nella produzione e siano tali da soddisfare esattamente date "richieste per l'uso".

3. Una definizione di sistema di produzione più profittevole. Nel cap. XII di *Produzione di merci a mezzo di merci* Sraffa risolve il problema della determinazione del sistema produttivo più profittevole, nel caso di pro-

5. Infatti Sraffa, pur non prendendo in considerazione, in questo contesto (§50), la difficoltà di cui si parla, tuttavia ne fa chiara menzione introducendo il "sistema tipo": Cfr. §53: "Prendiamo il caso di due merci che vengono prodotte congiuntamente da ciascuno di due metodi diversi. La possibilità di variare la misura in cui l'uno o l'altro metodo viene impiegato, garantisce un certo campo di variazione nelle proporzioni in cui le due merci possono essere prodotte nel complesso. Ma questo campo trova i suoi limiti nelle proporzioni in cui le due merci sono prodotte rispettivamente da ciascuno dei due metodi, così che i limiti sono raggiunti appena l'uno o l'altro metodo sia impiegato esclusivamente".

duzione singola (mentre dà solo qualche cenno^{per il} caso di produzione congiunta).

Sraffa inizia col supporre che siano noti $k+1$ metodi (a produzione singola) per produrre k merci, ossia che per una merce si conoscano due metodi di produzione.

Se la merce per la cui produzione si conoscono due metodi è una merce non-base, allora, per ciascun valore del saggio di profitto, i prezzi di tutte le merci base sono univocamente determinati, per cui "il metodo che produce a costi più bassi è evidentemente il più proficuo dei due per un produttore che costruisca un nuovo impianto" (/19/p.103).

Successivamente Sraffa costruisce un ragionamento analogo per il caso in cui la merce di cui si conoscono due metodi di produzione è una merce base.

Il problema è, in questo caso, complicato dal fatto che ciascuno dei due metodi di produzione implica un diverso sistema di produzione, con un diverso insieme di prezzi relativi. Sraffa adotta, allora, il seguente artificio.

"Se supponiamo per un momento che i prodotti dei due metodi siano due merci distinte, le quali però abbiano tali proprietà che mentre per tutti i possibili usi base esse possono essere considerate identiche e quindi completamente sostituibili l'una con l'altra, per altri usi, non-base, alcuni dei quali richiedono l'una e alcuni la altra delle due merci, non esiste possibilità di sostituzione. Il risultato è che per gli usi base la scelta fra i due metodi sarà esclusivamente su quello che produce più a buon mercato" (/19/ p.105).

La differenza tra i prezzi delle due "merci" (detta da Sraffa la misura del buon mercato di un metodo di produzione rispetto all'altro) varierà a seconda che il confronto venga compiuto nell'uno o nell'altro dei due sistemi produttivi, tuttavia si può dimostrare che

"l'ordine dei due metodi quanto a buon mercato (ossia il segno della differenza - ndr) sarà necessariamente lo stesso nei due sistemi. Infatti (...) è sempre il metodo il cui prodotto (...) è base nel sistema caratterizzato dal valore più alto di R che, in vicinanza del livello massimo del saggio del profitto, è il più a buon mercato in entrambi i sistemi. Man mano che il saggio del profitto viene diminuito, qualsiasi cambiamento nell'ordine dei due metodi quanto a buon mercato deve verificarsi ugualmente nei due sistemi, poichè esso implica il passaggio attraverso un punto di intersezione, e punti siffatti sono evidentemente comuni ai due sistemi" (/19/ p.106).

L'artificio di Sraffa appena esposto non si presta, ed è evidente, ad essere applicato al caso di produzione congiunta: infatti, in tal caso, i due metodi in alternativa potrebbero avere più di un prodotto in comune o, perfino, non averne alcuno^{6,7}.

6. In questa nota daremo un esempio numerico in cui i due sistemi in alternativa non hanno alcun prodotto in comune. Assumiamo che: (i) l'economia è stazionaria; (ii) esistono tre merci per il consumo (1, 2 e 3) che sono sempre consumate nelle proporzioni di sei unità della merce 1 e due unità della merce 2 per ogni unità della merce 3; (iii) si conoscono solo quattro metodi di produzione che possono essere rappresentati dalla seguente tabella.

	merce 1	merce 2	merce 3	lavoro		merce 1	merce 2	merce 3
(1)	0,1	-	-	1	→	0,2	0,1	0,1
(2)	-	0,5	0,5	1	→	1	-	-
(3)	1	-	1	1	→	-	1	-
(4)	-	1	2	1	→	2	-	-

Facili calcoli possono mostrare che i sistemi alla Sraffa possibili sono il sistema formato dai metodi 1, 2 e 3 ed il sistema formato dai metodi 1, 2 e 4.

7. Notiamo che (perfino quando i due metodi alternativi hanno uno ed un solo prodotto in comune) non è vero, come sembra credere Sraffa (/19/ p. 96), che se in ciascun sistema nessun prezzo possa diminuire, allo aumentare del saggio di profitto, più rapidamente del salario, il sistema più profittevole, per un dato saggio di profitto, coincide col sistema che, per quel dato saggio di profitto, consente il pagamento del saggio di salario più alto. Ciò può essere mostrato semplicemente con un esempio numerico ed un esempio di tal genere è fornito dall'appendice A.

Di questo procedimento, adottato da Sraffa, esiste una variante (logicamente equivalente nel caso di produzione singola), che è utilizzata da Garegnani in /3/.

Secondo il procedimento seguito da Garegnani, per determinare il sistema produttivo più profittevole a un dato saggio di profitto, si inizia col considerare un sistema produttivo qualsiasi. Ai prezzi che si verrebbero a determinare se detto sistema fosse adottato, si valuta se esiste un metodo di produzione che dia luogo ad extra-profitti. Se così fosse si prende in considerazione il sistema che si ottiene dal precedente sostituendo con tale metodo di produzione più profittevole il metodo corrispondente. Si prosegue operando in modo analogo finchè non si giunge a prendere in considerazione un sistema produttivo ai cui prezzi non esiste alcun metodo di produzione che dia luogo ad extra-profitti.

Garegnani dimostra che, nel caso di produzione singola,

"qualunque sia il sistema inizialmente in uso, l'adozione di metodi meno costosi dovrà infine condurre al sistema a cui corrisponda il salario più alto per il livello di r dato, dove non vi sarà incentivo per ulteriori mutamenti di sistema. Quando poi, al livello dato di r , due o più sistemi diano lo stesso w , e questo w sia maggiore di quello corrispondente ad ogni altro sistema, i due o più sistemi alternativi potranno coesistere, poichè avranno prezzi uguali per tutte le merci ad essi comuni" (/3/ p.302).

Ci sembra di poter dare, allora, le seguenti definizioni.

Definizione 3.1. Dati due sistemi i e j con le stesse merci e con tutti i metodi in comune eccetto uno, diremo che il sistema i è preferibile secondo Garegnani al sistema j , per un dato saggio di profitto se

- ai prezzi relativi al dato saggio di profitto e al sistema j il metodo presente nel sistema i è assente nell'altro dà luogo ad

extra-profitti positivi e

- ai prezzi relativi al dato saggio di profitto e al sistema i il metodo presente nel sistema j e assente nell'altro dà luogo a extra-costi (ovvero extraprofitti negativi).

Definizione 3.2. La successione di sistemi $T_0, T_1, \dots, T_n, \dots$ sarà detta una G -successione al saggio di profitto $\bar{r}$ se si verifica che

- T_0 è un sistema con prezzi non negativi,

- se ai prezzi relativi al sistema T_i e al saggio di profitto $\bar{r}$ esiste qualche metodo che dia luogo ad extraprofitti positivi, allora T_{i+1} è un sistema con tutti i metodi tranne uno in comune con T_i e preferibile secondo Garegnani a T_i al saggio di profitto $\bar{r}$, altrimenti $T_{i+1} = T_i$.

Definizione 3.3. Dato un insieme di metodi di produzione e date delle richieste per l'uso, sia S l'insieme dei sistemi di produzione secondo Sraffa che si possono formare con tali metodi e tali richieste per l'uso. Se, al saggio di profitto r , si verifica che:

(i) per ogni sistema di produzione T_i , appartenente ad S , ai cui prezzi esiste un metodo di produzione t che dà luogo ad extra-profitti, esiste in S un sistema di produzione secondo Sraffa, costituito dal metodo t e da tutti i metodi del sistema T_i , eccetto uno, preferibile secondo Garegnani al sistema T_i ;

(ii) tutte le possibili G -successioni al saggio di profitto r che è possibile costruire con tali sistemi convergono e convergono tutte sullo stesso sistema T ;

diremo che T è il sistema di produzione più profittevole secondo Garegnani al saggio di profitto r . Nel caso, invece, che le G -successioni convergono, e convergono sui sistemi $T, T', T'', \dots$, se tali sistemi possono coesistere al saggio di profitto r , allo-

ra diremo che tali sistemi costituiscono l'insieme dei sistemi più profittevoli secondo Garegnani al saggio di profitto r .

4. Teoremi sui concetti introdotti.⁸ In questo paragrafo un sistema secondo Sraffa sarà indicato con la coppia (A, B) , in cui $A \equiv || a_{ij} ||$ e $B \equiv || b_{ij} ||$ sono matrici quadrate di dimensione k , in cui a_{ij} (in cui b_{ij}) rappresenta la quantità della merce j impiegata col (prodotta col) metodo i , per ogni unità di lavoro impiegata col metodo i .

Siano (A_1, B_1) e (A_2, B_2) due sistemi con le stesse k merci e con tutti i metodi in comune eccetto l' s -esimo.

Per semplificare l'esposizione, definiamo C e D tali che:

$$C \equiv || c_{ij} || = (B_1 - (1+r)A_1); \quad D \equiv || d_{ij} || = (B_2 - (1+r)A_2)$$

in cui r rappresenta il saggio di profitto.

Avremo che per ogni r :

$$c_{ij} = d_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, k; j = 1, 2, \dots, k) \quad (4.1)$$

Siano p_i^I e p_i^{II} i prezzi, in termini di salario, della merce i , rispettivamente col sistema I ($\equiv (A_1, B_1)$) e col sistema II ($\equiv (A_2, B_2)$).

Se il salario è pagato *post factum*, le seguenti equazioni sono soddisfatte.

$$\sum_{j=1}^k c_{ij} p_j^I = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.2a)$$

⁸ La lettura del §4 non è essenziale alla comprensione dei paragrafi successivi. In tale paragrafo si è voluto solo mostrare che le definizioni 2.1 e 3.3 sono suscettibili di risultati generali.

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} p_j^{II} = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.2b)$$

Nel seguito sarà utile conoscere la relazione tra p_i^I e p_i^{II} . Per ottenere tale relazione introduciamo il vettore $(p_1, p_2, \dots, p_k)$, che rappresenta una delle possibili soluzioni del sistema formato dalle $k-1$ equazioni comuni, per le (4.1), ai sistemi (4.2a) e (4.2b).

Sussistono le seguenti eguaglianze⁹:

$$p_i = p_i^{II} + h C_{si} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.3)$$

in cui con M_{ij} si intende il cofattore di m_{ij} nella matrice $M = || m_{ij} ||$, (nota che per le (4.1), $C_{si} = D_{si}$) ed h è un numero reale qualsiasi.

Al variare di h , $(p_1, p_2, \dots, p_k)$ assume tutti i suoi possibili valori, per cui:

$$p_i^I = p_i^{II} + h^* C_{si} \quad (i = 1, 2, \dots, k) \quad (4.4)$$

dove h^* è una funzione di r .

Dalle (4.3) si ricava anche che se, per qualche valore di r , $C_{si} = 0$, allora, per quel valore di r , p_i è univocamente determinato indipendentemente dall' s -esimo metodo.

Nelle (4.4) avremo $h^* = 0$ se e solo se $p_i^I = p_i^{II}$ per ogni i . In tal caso i due sistemi possono certamente coesistere. Se $p_i^I \neq p_i^{II}$ per qualche i , sia $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ tale che

9. Si può facilmente verificare che se il vettore γ è soluzione del sistema $AX = \beta$, e il vettore Z è soluzione del sistema $AX = 0$, allora il vettore $\gamma + hZ$, con h scalare, è soluzione del sistema $AX = \beta$. Se poi $AX = \beta$ è un sistema di n equazioni in $n+1$ incognite e Z non è formato da tutti zeri, allora $\gamma + hZ$, al variare di h , esprime tutte e sole le sue possibili soluzioni.

$$\sum_{i=1}^k u_i p_i^I + \sum_{i=1}^k u_i p_i^{II}$$

Nel seguito ci riferiremo alla merce composta la cui unità è costituita da u_1 unità della merce 1, u_2 unità della merce 2, $\dots$, u_k unità della merce k , come alla merce u .

Dalle (4.4) otteniamo:

$$\sum_{i=1}^k u_i p_i^I = \sum_{i=1}^k u_i p_i^{II} + h^* \sum_{i=1}^k u_i C_{si}$$

che, inserita nella (4.4), ci dà:

$$p_i^I = p_i^{II} + \frac{\sum_{j=1}^k u_j p_j^I - \sum_{j=1}^k u_j p_j^{II}}{\sum_{j=1}^k u_j C_{sj}} C_{si} \quad (4.5)$$

Indichiamo con ρ_I l'extraprofitto che si ricava dalla utilizzazione del metodo s -esimo del sistema II ai prezzi del sistema I. Analogamente è dato a ρ_{II} .

Avremo che:

$$\rho_I = \sum_{j=1}^k d_{sj} p_j^I - 1 \quad (4.6a)$$

$$\rho_{II} = \sum_{j=1}^k c_{sj} p_j^{II} - 1 \quad (4.6b)$$

Introducendo le eq. (4.5) nelle (4.6) e tenendo conto delle eq. (4.1) e delle equazioni s -esime dei sistemi (4.2), otteniamo:

$$\rho_I = \frac{\sum_{j=1}^k u_j p_j^I - \sum_{j=1}^k u_j p_j^{II}}{\sum_{j=1}^k u_j c_{sj}} |D| \quad (4.7a)$$

$$\rho_{II} = - \frac{\sum_{j=1}^k u_j p_j^I - \sum_{j=1}^k u_j p_j^{II}}{\sum_{j=1}^k u_j c_{sj}} |C| \quad (4.7b)$$

dove con $|M|$ si intende il determinante della matrice M .

Siamo adesso in grado di dimostrare i seguenti teoremi.

Teorema 4.1. Dati due sistemi alla Sraffa con le stesse merci e con tutti i metodi in comune eccetto uno, esiste tra i due, per un dato saggio di profitto, il sistema preferibile secondo Garegnani se e solo se esiste la possibilità di riproporzionare le industrie dei due sistemi in modo tale che, per il dato saggio di profitto, sia possibile produrre, utilizzando tutti i metodi, una medesima merce (composita) con un saggio di sviluppo uniforme uguale al saggio di profitto dato.

Dimostrazione. Dalle (4.7) si ricava che ρ_I e ρ_{II} sono discordi se e solo se $|D|$ e $|C|$ sono concordi, cioè se e solo se nello spazio $\mathbb{R}^k$ il segmento di retta che congiunge i punti $(o_{s1}, o_{s2}, \dots, o_{sk}) = (d_{s1}, d_{s2}, \dots, d_{sk})$ non attraversa l'iperpiano passante per l'origine e per i punti $(o_{t1}, o_{t2}, \dots, o_{tk})$ con $t = 1, 2, \dots, s-1, s+1, s+2, \dots, k$; cioè se e solo se i "coni del consumo netto possibile con un saggio di sviluppo uniforme uguale al saggio di profitto dato"¹⁰ relativi ai due sistemi hanno punti interni in comune.

Teorema 4.2. Dati due sistemi alla Sraffa con le stesse merci e con tutti i metodi in comune eccetto uno, se, per un dato saggio del profitto, esiste, tra i due, il sistema preferibile secondo Garegnani, questo coincide col sistema che minimizza o che massimizza il prezzo, in termini di salario, della merce u a secondo che, in ciascuno dei due sistemi, dobbiamo espandere o contrarre il metodo non comune ai due sistemi quando riproporzioniamo (nozionalmente) i vari metodi allo scopo di ottenere un incremento del consumo di una unità della merce u con un saggio di sviluppo uniforme uguale al saggio di profitto dato.

Dimostrazione. Immediata dalle eq. (4.7) tenendo presente sia il Teorema 4.1, sia il significato economico di $\frac{c_{sj}}{|D|}$ (di $\frac{c_{sj}}{|C|}$) che è l'elemento s -esimo della riga j -esima dell'inversa della matrice D (della matrice C).

c.v.d.

Teorema 4.3. Se (A_1, B_1) e (A_2, B_2) sono due sistemi di produzione alla Sraffa tali che per ciascuno di essi sia possibile riproporzionare i metodi di produzione in modo tale da produrre, impiegando tutti i metodi del sistema, la medesima merce (eventualmente composita), che chiameremo "merce u ", con un saggio di sviluppo uniforme uguale al saggio di profitto dato, allora ai prezzi del sistema con il più alto prezzo, in termini di salario, della merce u , esiste almeno un metodo dell'altro sistema che dà luogo ad extra profitti.

10. Il "cono del consumo possibile con un saggio di sviluppo uniforme uguale a g " è l'insieme delle k -uple ciascuna delle quali rappresenta le quantità di ciascuna merce che sono disponibili per il consumo al dato saggio di sviluppo se un dato sistema di produzione è adottato (al variare del lavoro impiegato nei vari metodi di produzione). Si prova facilmente che tale insieme coincide col cono generato dalla matrice $\{B - (1+g)A\}^T$.

Dimostrazione. Se p^I e p^{II} sono i vettori dei prezzi del sistema (A_1, B_1) e (A_2, B_2) rispettivamente, $E = (1, 1, \dots, 1)^T$ e $U = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T$ dove u_i è la quantità della merce i che entra in una unità di merce u , allora, per ipotesi sono vere le seguenti condizioni.

$$(B_1 - (1+r)A_1)p^I = E \quad (4.8a)$$

$$(B_2 - (1+r)A_2)p^{II} = E \quad (4.8b)$$

$$U^T(B_1 - (1+r)A_1)^{-1} > 0 \quad (4.9a)$$

$$U^T(B_2 - (1+r)A_2)^{-1} > 0 \quad (4.9b)$$

Per dimostrare il teorema basta provare che se

$$U^T p^I < U^T p^{II} \quad (4.10)$$

allora

$$(B_1 - (1+r)A_1)p^{II} \leq E$$

Se così non fosse,

$$(B_1 - (1+r)A_1)p^{II} \leq E$$

da cui, premoltiplicando per $U^T(B_1 - (1+r)A_1)^{-1}$ e tenendo presenti le (4.8a) e (4.9a) otteniamo:

$$U^T p^{II} \leq U^T p^I$$

che contraddice la (4.10).

c.v.d.

Teorema 4.4. Sia (A_1, B_1) un sistema di produzione tale che

$$U^T(B_1 - (1+r)A_1)^{-1} = U^T C^{-1} > 0$$

e sia (A, B) un metodo di produzione tale che

$$\{B^T - (1+r)A^T\}p^I > 1$$

in cui a_i (b_i) è la quantità della merce i utilizzata come input (ottenuta come output) per ogni unità di lavoro utilizzata nel metodo (A, B) . Allora esiste un sistema di produzione (A_2, B_2) , costituito dal metodo (A, B) e da $k-1$ metodi di produzione del sistema (A_1, B_1) , preferibile ad (A_1, B_1) e tale che

$$U^T(B_2 - (1+r)A_2)^{-1} = U^T D^{-1} > 0$$

Dimostrazione. Consideriamo il sistema di equazioni in (Z, a)

$$\begin{bmatrix} Z \\ a \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} C \\ C^T \end{bmatrix} = U^T \quad (4.11)$$

dove $C = B - (1+r)A$. Come è noto le soluzioni del sistema (4.11) sono date, al variare di h nell'insieme dei numeri reali, da

$$(Z^T, a) = (U^T C^{-1}, 0) + h w^* \quad (4.12)$$

dove w^* è una soluzione del sistema

$$w^T \begin{bmatrix} C \\ C^T \end{bmatrix} = 0^T$$

Per ipotesi

$$\begin{bmatrix} C \\ C^T \end{bmatrix} P \geq \begin{bmatrix} E \\ 1 \end{bmatrix} > 0.$$

Allora, per un noto teorema dell'alternativa (vedi /2bis/ p.48/) gli elementi di W^* non sono concordi, per cui si ricava facilmente, anche in virtù della non singolarità di C , che esiste un unico valore h^* di h tale che per la corrispondente soluzione (z^*, a^*) del sistema (4.12) si abbia:

$$a^* > 0, z^* \geq 0, \} j: z_j^* = 0.$$

Ebbene, il sistema (A_2, B_2) , costituito da tutti i metodi del sistema (A_1, B_1) tranne il j -esimo, che è sostituito dal metodo (A, B) , è preferibile secondo Garegnani al sistema (A_1, B_1) . Per provare ciò, post-moltiplichiamo il sistema (4.11) per $C^{-1}E_j$ e poniamo $a = a^*$. Si ottiene:

$$z_j^* + a^* C^T C^{-1} E_j = U^T C^{-1} E_j > 0$$

e tenendo presente che $z_j^* = 0$, $a^* > 0$, $C^T C^{-1} E_j = |C|/|D|$, si ricava che $|C|$ e $|D|$ sono concordi, per cui, dalla dimostrazione del Teorema 1, si ricava che tra i sistemi (A_1, B_1) e (A_2, B_2) esiste il sistema preferibile secondo Garegnani. Allora, poiché per ipotesi $D P^I \geq E$, si riconosce che (A_2, B_2) è preferibile ad (A_1, B_1) .
c.v.d.

Teorema 4.5. Siano dati un insieme di metodi di produzione e delle richieste per l'uso così da formare m sistemi di produzione secondo Sraffa (A_h, B_h) , con $h = 1, 2, \dots, m$, che costituiscono l'insieme S dei sistemi di produzione secondo Sraffa. Allora condizione sufficiente affinché esista l'insieme dei sistemi più profittevoli secondo

Garegnani al saggio di profitto r è che:

- (a) al saggio di profitto r esiste in S un sistema con prezzi non negativi;
- (b) $|B_h - (1+r)A_h| \neq 0$ ($h = 1, 2, \dots, m$).
- (c) esiste una "merce u " tale che l'insieme S coincide con l'insieme delle "collezioni di k metodi di produzione" i cui metodi, opportunamente riproporzionati, sono in grado di produrre, impiegando tutti i metodi della "collezione di k metodi di produzione", la "merce u " con un saggio di sviluppo uniforme uguale al saggio di profitto r .

Dimostrazione. Dal Teorema 4.4 segue che la condizione (i) della Definizione 3.3 è verificata. Dopo di che dal Teorema 4.3 segue che se il sistema di produzione in uso a r non è quello che minimizza il prezzo della merce u , esiste almeno un metodo che dà luogo ad extra-profitti. Il Teorema 4.2, allora, ci assicura che via via che tali metodi vengono introdotti il prezzo, in termini di salario, della merce u si riduce finché non si giunge al sistema che minimizza il prezzo della merce u . Se ci fossero due (o più) sistemi che minimizzano il prezzo della merce u allora tali sistemi ammettono gli stessi prezzi. Per provare ciò, siano (A_1, B_1) e (A_2, B_2) tali sistemi, per ipotesi sono vere le (4.8)-(4.9). Inoltre:

$$([B_1 - (1+r)A_1]P^{II} - E) \leq 0 \quad (4.13)$$

Infatti, se esistesse un metodo che ai prezzi di (A_2, B_2) dia luogo ad extraprofitti non sarebbe vero, per il Teorema 4.2, che (A_2, B_2) è un sistema che minimizza il prezzo, in termini di salario della merce u . Inoltre, per ipotesi, $U^T P^I = U^T P^{II}$, per cui il prodotto scalare tra i vettori $U^T (B_1 - (1+r)A_1)^{-1}$ e $(B_1 - (1+r)A_1)P^{II} - E$ è nullo,

da cui, tenendo presente le (4.9a) e (4.13), si ricava che:

$$([B_1 - (1+r)A_1]P^{II} - E) = 0$$

da cui, tenendo presente il sistema (4.8a):

$$P^{II} = (B_1 - (1+r)A_1)^{-1}E = P^I \quad \text{c.v.d.}$$

5. *Alcune difficoltà per la teoria di Sraffa.* I teoremi del paragrafo precedente non ci assicurano che, dato un insieme di metodi di produzione, esiste sempre il sistema più profittevole: un esempio numerico in cui ciò non accade è fornito nell'appendice B.

La possibilità che non esista il sistema più profittevole ci sembra un risultato inquietante per la teoria classica riproposta da Sraffa: la teoria classica, infatti, come ha recentemente chiarito Garegnani/4/, presuppone l'esistenza di una "posizione di lungo periodo" caratterizzata sia dall'uniformità dei prezzi, del saggio di profitto e del saggio di salario, sia dall'uso del sistema più profittevole.

I teoremi del paragrafo precedente, inoltre, non ci assicurano neppure che se esiste un sistema con prezzi tutti positivi, siano positivi anche i prezzi del sistema più profittevole (qualora esista). Invero, ciò non può essere provato: sempre nell'esempio dell'appendice B, per alcuni valori del saggio di profitto il sistema più profittevole secondo Garegnani esiste ma ha prezzi negativi, pur esistendo un altro sistema con prezzi tutti positivi. Inoltre, tale eventualità può presentarsi anche in casi in cui il sistema più profittevole secondo Garegnani esiste per tutti i valori del saggio di profitto appartenenti all'intervallo rilevante: un esempio numerico è fornito dall'appendice C.

La difficoltà appena menzionata è notevole. Sraffa aveva rilevato la possibilità che, nel caso di produzione congiunta, qualche prezzo potesse essere negativo per valori positivi del saggio di salario e del saggio

di profitto (/19/ 169), ma aveva potuto commentare tale risultato nel modo seguente.

"Questo risultato di per sé non è certo sorprendente. Esso implica soltanto che, per quanto nella realtà dei fatti i prezzi siano tutti positivi, un cambiamento nel salario potrebbe creare una situazione la cui logica richiederebbe che alcuni dei prezzi diventassero negativi. E ciò essendo inammissibile, i metodi di produzione che conducessero a tale risultato verrebbero scartati per far posto ad altri metodi che nella nuova situazione comportassero prezzi positivi" (/19/pp.75-6)

Tuttavia, come si è mostrato, con le Definizioni 2.1 e 3.3 non è possibile costruire una teoria che ci assicuri che il sistema più profittevole abbia prezzi tutti positivi, neanche nell'ipotesi che un sistema con prezzi tutti positivi esista.

In conclusione si può affermare che le difficoltà individuate sono tali da imporre la rimozione di qualcuna delle assunzioni di Sraffa. Nel seguito di questo lavoro suggeriremo di sostituire, al fine di superare tali difficoltà, le definizioni di "sistema di produzione" e di "sistema più profittevole".

6. *Analisi e riformulazione delle definizioni date.* Le Definizioni 2.1 e 3.3 saranno qui analizzate partendo dalle difficoltà cui danno origine, al fine di formulare definizioni alternative.

La Definizione 2.1 asserisce che un sistema di produzione secondo Sraffa è un insieme di metodi di produzione, che gode di due proprietà. Di queste due proprietà, l'una (soddisfazione delle richieste per l'uso) risponde a esigenze di realismo, l'altra (uguaglianza tra numero dei metodi e numero delle merci coinvolte nella produzione), invece, risponde a esigenze dell'analisi.

Non ci sembra, pertanto, possibile rinunciare alla prima proprietà.

mentre è possibile rinunciare alla seconda, sostituendola con qualche altra condizione che consenta la determinazione dei prezzi.

Se, tuttavia, si ammette che il numero dei metodi di produzione sia minore (ovviamente non può essere maggiore) del numero delle merci coinvolte nella produzione, allora si potrebbero verificare dei casi in cui le richieste per l'uso non possano essere soddisfatte esattamente e qualche merce dovrebbe essere prodotta in eccesso rispetto alle richieste per l'uso. Se il prezzo di una merce prodotta in eccesso fosse positivo, a qualche imprenditore, in regime di concorrenza, converrebbe venderla a un prezzo più basso, per cui il prezzo di una tale merce, in "posizione di lungo periodo", non può essere positivo: assumeremo, pertanto, che sia nullo.

Ci sembra di poter dare, allora, la seguente definizione.¹¹

Definizione 6.1. Un sistema di produzione è un insieme non vuoto di metodi di produzione che possono essere attivati in modo tale da soddisfare date richieste per l'uso e da determinare, per qualche valore del saggio di profitto, tutti i prezzi sotto la condizione che se la produzione di una merce eccede le richieste per l'uso il suo prezzo è nullo.

Notiamo che con la *Definizione 6.1* i prezzi non sono più determinati univocamente dalle condizioni di produzione come accadeva con la *Definizione 2.1*, ma le condizioni di produzione concorrono a determinare i prezzi congiuntamente con le richieste per l'uso: nulla ci assicura che sistemi formati dagli stessi metodi, ma con diverse richieste per l'uso abbiano gli stessi prezzi.

11. La *Definizione 6.1* coincide con la definizione di "quadratic system or truncation" data da Schefold /17/ nel caso in cui le richieste per l'uso sono quelle di un'economia che cresce ad un saggio di sviluppo uniforme uguale al saggio di profitto dato e in cui si consuma sempre la medesima merce (composita).

Analizziamo, adesso, la *Definizione 3.3*. Notiamo subito che tale definizione è atipica rispetto alle usuali definizioni di "equilibrio".

In genere, infatti, l'equilibrio è definito come una situazione in cui le decisioni prese da tutti i soggetti indipendenti sono, nel mercato, compatibili tra loro: l'equilibrio non è definito, cioè, come una situazione che viene raggiunta, ma come una situazione in cui, se raggiunta, le forze di mercato considerate non ce ne fanno allontanare.¹²

Una definizione del genere è utile anche perché consente di distinguere il problema dell'esistenza dell'equilibrio, dal problema della sua stabilità e della sua unicità.

Ci sembra che la distinzione appena menzionata, sia utile non solo per le analisi di "equilibrio", ma anche per l'analisi delle "posizioni di lungo periodo", per cui potremo dire che il sistema α è il più profittevole al saggio di profitto r se, ai prezzi relativi al sistema α e al saggio di profitto r , non è noto alcun metodo di produzione che dia luogo ad extra-profitti.

Se il sistema α è il più profittevole secondo Garegnani, allora è anche il più profittevole secondo la "definizione" appena data, ma non è vero il viceversa.

Infatti, il procedimento di Garegnani per individuare il sistema più profittevole può essere visto come un procedimento iterativo per la individuazione del sistema più profittevole: come tutti i procedimenti iterativi, può non convergere sulla soluzione anche quando la soluzione esiste, tuttavia se converge, allora converge necessariamente sulla soluzione cercata.

La "definizione" ora data di "sistema più profittevole" presenta.

12. "L'equilibrio economico è quello stato il quale si manterrebbe indefinitamente, ove non fosse alterato da qualche mutamento delle condizioni in cui si osserva" (Pareto /10/ p. 100).

tuttavia, due difficoltà.

La prima difficoltà di ordine terminologico. Se esistono più sistemi che soddisfano le sue condizioni, tali sistemi non sono necessariamente compatibili tra loro¹³, conviene, perciò, adottare un termine che non contenga "il più ..." o "il più ...". Nel seguito adotteremo la locuzione "sistema da posizione di lungo periodo".

La seconda difficoltà è concettuale. Come si è visto, è possibile che esista qualche sistema che soddisfi le condizioni della definizione sebbene qualcuno dei suoi prezzi sia negativo. Ovviamente un tale sistema sarebbe privo di interesse per cui conviene escluderlo.

In conclusione, diamo la seguente definizione.

Definizione 6.2. Un sistema di produzione sarà detto *sistema da posizione di lungo periodo al saggio di profitto $\bar{r}$* se al saggio di profitto $\bar{r}$ ammette prezzi tutti non negativi¹⁴ e se non è noto alcun metodo di produzione che a quei prezzi dia luogo ad extra-profitti.

7. Un modello generalizzato di von Neumann. Le Definizioni 6.1 e 6.2 possono essere riformulate in modo più chiaro e formale, introducendo il seguente "vocabolario".

Siano noti m metodi di produzione che coinvolgono la produzione di n merci, sia A (sia B) la matrice $m \times n$ degli inputs (degli outputs) di cui ciascun elemento a_{ij} (ciascun elemento b_{ij}) - con $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$ - rappresenta la quantità della merce j utilizzata dal (prodotta col) metodo i , quando una unità di lavoro¹⁴ è impiegato col metodo i .

13. Se nell'esempio dell'appendice B consideriamo il sistema III, formato dal solo metodo (2), avremo che $p_1^{III} = 1$, $p_2^{III} = 0$; a tali prezzi risulta che né il metodo (1) né il metodo (3) danno luogo ad extraprofitti per $r \geq 1$; pertanto per $r = 1$ sia il sistema II (cfr. appendice B) sia il sistema III soddisfano le condizioni della definizione di cui si tratta nel testo.

Siano $d_1, d_2, \dots, d_n$ le "richieste per l'uso" della merce $1, 2, \dots, n$. Sia in oltre

$$- D^T = (d_1, d_2, \dots, d_n),$$

- $\alpha(x)$ la matrice diagonale che ha come elementi della diagonale principale gli elementi del vettore x ,

$$- E = (1, 1, \dots, 1)^T.$$

Con i simboli appena dati la Definizione 6.1 può essere data nel modo seguente.

Definizione 7.1. Sia s un sottoinsieme dell'insieme $\{1, 2, \dots, m\}$ diremo che s rappresenta un *sistema di produzione* se per qualche scalare r , esistono un vettore (colonna) x di dimensione m ed un vettore (colonna) p di dimensione n , tali che:

$$x_i = 0 \quad \text{se } i \notin s \quad (7.1)$$

$$x^T(B - A) \geq D^T \quad (7.2)$$

$$x^T(B - A)p = D^T p \quad (7.3)$$

$$\alpha(x)(B - (1+r)A)p = \alpha(x)E \quad (7.4)$$

$$x \geq 0 \quad (7.5)$$

Ovviamente è possibile che le "richieste per l'uso" p siano a loro volta funzioni di x e p . Daremo nell'appendice D due esempi di vettori p sotto ipotesi alternative di "investimento" e di "consumo".

Notiamo, infine, che se $D^T = x^T M$ in cui M è una matrice $m \times n$ i cui elementi non sono funzioni di x , allora il vettore x non è dimensionato e lo si può determinare ponendo

14. Si sta implicitamente assumendo che ciascun metodo impiega una quantità positiva di lavoro. E' ovvia, tuttavia, la generalizzazione al caso in cui qualche metodo non impiega direttamente lavoro.

$$X^T E = L$$

dove L è la quantità di lavoro occupata nell'economia.

Con i simboli introdotti in questo paragrafo la Definizione 6.2 può essere riformulata nel modo seguente.

Definizione 7.2. Sia s un sistema di produzione, diremo che s è un sistema da posizione di lungo periodo al saggio di profitto $\bar{r}$ se i vettori x e p che soddisfano le condizioni (7.1)-(7.5) per $r = \bar{r}$ soddisfano pure le condizioni seguenti:

$$(B - (1+r)A)p \leq E \quad (7.6)$$

$$p \geq 0 \quad (7.7)$$

Siamo adesso in grado di riconoscere facilmente che esistono due modi per individuare un sistema da posizione di lungo periodo al saggio di profitto r . Uno consiste nell'individuare prima tutti i sistemi produttivi relativi ad un dato insieme di metodi di produzione e a date richieste per l'uso - ossia tutti i sottoinsiemi $s_1, s_2, \dots, s_z$ ($z \leq \sum_{k=1}^m \binom{m}{k}$) dell'insieme $\{1, 2, \dots, m\}$ per cui esistono i vettori x e p che soddisfano le condizioni (7.1)-(7.5) - per poi valutare se esiste un sistema produttivo ai cui prezzi (al saggio di profitto $\bar{r}$) le disequazioni (7.6)-(7.7) sono soddisfatte.

Un modo più diretto consiste nel vedere se esistono due vettori x e p che soddisfano i vincoli (7.2)-(7.7). Infatti se x^* e p^* sono due vettori che soddisfano tali vincoli allora l'insieme

$$s = \{i / i \in \{1, 2, \dots, m\}, x_i^* \neq 0\} \quad (7.8)$$

rappresenta un sistema da posizione di lungo periodo.

In definitiva è possibile dimostrare (e la prova è banale) il seguente teorema.

Teorema 7.1. Dati m metodi di produzione rappresentati dalle matrici (A, B) e dato il vettore delle richieste per l'uso D , esiste un sistema da posizione di lungo periodo al saggio di profitto $\bar{r}$ se e solo se esistono due vettori x e p tali che

$$x^T (B - A) \geq D^T \quad (7.9)$$

$$x^T (B - A)p = D^T p \quad (7.10)$$

$$(B - (1+r)A)p \leq E \quad (7.11)$$

$$x^T (B - (1+r)A)p = x^T E \quad (7.12)$$

$$x \geq 0 \quad (7.13)$$

$$p \geq 0 \quad (7.14)$$

e tale sistema è rappresentato dall'insieme (7.8) ponendo $x_i^* = x_i$.

Il Teorema 7.1 è notevole in quanto il sistema di disequazioni (7.9)-(7.14) può essere interpretato come un "modello generalizzato di von Neumann". Per mostrare ciò, notiamo subito che se si assume l'esistenza di un saggio di sviluppo uniforme $g \geq 0$, allora il vettore delle richieste per l'uso D può essere scritto

$$D = gA^T X + C \quad (7.15)$$

dove $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$ rappresenta il vettore delle merci "richieste per il consumo".

Se ora sostituiamo le eq. (7.15) nel sistema di disequazioni (7.9)-(7.14), tale sistema diventa il modello generalizzato di von Neumann esposto da Burmeister nell'appendice di Burmeister/2/. L'unica differenza è che in Burmeister/2/ si adotta come numezario una merce composta costituita da

una unità di ciascuna merce (singola), mentre qui si è adottato come numerario il lavoro.

Fin ora abbiamo trascurato di prendere in considerazione la "terra" e le risorse scarse. Nell'appendice E cercheremo di colmare questa lacuna.

8. *Un'ulteriore precisazione.* Il sistema di disequazioni (7.9)-(7.14) non ammette sempre soluzioni. E' possibile individuare esempi in cui esiste un sistema di produzione con prezzi tutti non negativi, ma non esiste un sistema da posizione di lungo periodo.

Potrebbe sembrare che sia necessario, allora, cambiare nuovamente qualche assunzione. Ciò, tuttavia, non ci sembra vero. Nel Teorema 4.5 le richieste per l'uso non giocano alcun ruolo, mentre nel Teorema 7.1 giocano un ruolo essenziale. Ciò di cui abbiamo bisogno, quindi, potrebbe essere non una revisione delle assunzioni accolte, ma una teoria convincente della determinazione delle richieste per l'uso.

Contemporaneamente ci sembra certamente utile individuare delle condizioni sufficienti¹⁵ affinché il sistema (7.9)-(7.14) ammetta soluzioni.

Per completezza, nell'appendice F si riporterà un esempio numerico (dovuto a Marrelli-Salvadori/7/) che prova l'esistenza di casi in cui il sistema (7.9)-(7.14) non ammette soluzioni. Tale esempio prova, anche secondo Marrelli Salvadori/7/, che se si ammette la possibilità di produzione congiunta non è possibile sovrainporre esogenamente a un dato sistema economico

15. ⁰Condizioni sufficienti affinché esistano soluzioni del sistema (7.9)-(7.14) sono state date da Hoga-Otsuki /5/, Morishima /9/ cap. VII, ed altri, tuttavia, le assunzioni fatte sono tali che sia i capitalisti che i lavoratori consumano tutte le merci, ossia sono esclusi sia i beni capitali puri, sia i "beni di lusso", sia i "beni inferiori". Nell'appendice F diamo un esempio in cui tutte le assunzioni fatte da Morishima (/9/ pp. 94,99,101,109) sono rispettate, eccetto l'assunzione (IIc) di p. 101, e il teorema di esistenza dimostrato da Morishima /9/ cap. VII non è più vero. Ciò prova che l'assunzione (IIc), che con l'assunzione (IIb) di /9/ p.99 implica che i capitalisti consumano tutte le merci, è cruciale per quel teorema.

un saggio di sviluppo uniforme con ipotesi di risparmio "alla Pasinetti/11/".

9. *Conclusioni.* In questo lavoro abbiamo criticato la definizione di Sraffa di "sistema di produzione" ed in particolare abbiamo criticato l'assunzione di Sraffa secondo cui un sistema di produzione è formato da un numero di metodi di produzione pari al numero delle merci coinvolte nella produzione. Si è notato, anche, come questa critica sia notevole, in quanto se il numero dei metodi è minore del numero delle merci, allora non è possibile determinare i prezzi assumendo date le quantità.

Si sono date, inoltre, delle definizioni alternative di "sistema di produzione" e di "sistema da posizione di lungo periodo", che sono risultate consistenti con un'analisi alla von Neumann.

Appendice A¹⁶

In questa appendice vogliamo mostrare con un esempio numerico che, anche se in ciascun sistema di produzione nessun prezzo diminuisce più rapidamente del salario, non è necessariamente vero che il sistema più profittevole coincide col sistema che, per un dato saggio di profitto (salario), può pagare il più alto saggio di salario (profitto).

Assumiamo un'economia con due merci (1 e 2) in cui si conoscono tre metodi di produzione che possono essere rappresentati dalla Tabella A.

Tabella A

	merce 1	merce 2	lavoro		merce 1	merce 2
(1)	1	1	2	+	2	4
(2)	-	3	1	+	3	-
(3)	-	1	2	+	2	-

Se le condizioni di reintegrazione sono rispettate, allora dobbiamo considerare il sistema I (formato dai metodi (1) e (2)) ed il sistema II (formato dai metodi (1) e (3)).

Sia p_i^j ($i = 1, 2; j = I, II$) il prezzo, in termini di salario, della merce i col sistema j . Da facili calcoli si ricava:

$$p_1^I = \frac{9+5r}{3(4-r-r^2)}, \quad p_2^I = \frac{5+r}{3(4-r-r^2)}; \quad R_I = \frac{\sqrt{17}-1}{2}$$

$$p_1^{II} = \frac{8}{7-2r-r^2}, \quad p_2^{II} = \frac{2(1+r)}{7-2r-r^2}; \quad R_{II} = 2\sqrt{2}-1$$

$$p_1^j, p_2^j, \frac{dp_1^j}{dr}, \frac{dp_2^j}{dr} > 0 \quad \text{per } 0 \leq r < R_j \quad (j = I, II)$$

$$\lim_{r \rightarrow R_j} p_i^j = - \quad (i = 1, 2; j = I, II)$$

Per cui in ciascun sistema nessun prezzo diminuisce più rapidamente del salario. Tuttavia si può facilmente verificare che:

$$\text{se } 0 \leq r < \frac{4\sqrt{5}-5}{5}, \text{ allora } p_1^I < p_1^{II} \text{ ma } p_2^I > p_2^{II}$$

$$\text{se } \frac{4\sqrt{5}-5}{5} < r < 1, \text{ allora } p_1^I > p_1^{II} \text{ ma } p_2^I < p_2^{II}$$

Inoltre si può facilmente verificare che il sistema più profittevole esiste e coincide col sistema I per $0 \leq r < \frac{4\sqrt{5}-5}{5}$ ovvero col

$$\text{sistema II per } \frac{4\sqrt{5}-5}{5} < r \leq R_{II}.$$

16. Ripresa da Salvadori /14/ appendice A.

Appendice B¹⁷

In questa appendice mostreremo, con un esempio numerico, che esistono dei casi in cui il sistema più profittevole secondo Garegnani non esiste.

Faremo le seguenti assunzioni: (i) l'economia è stazionaria; (ii) esistono due merci per il consumo (1 e 2) che sono sempre consumate nelle proporzioni di uno a uno; (iii) si conoscono solo tre metodi di produzione che possono essere rappresentati dalla seguente *Tabella B*

Tabella B

	merce 1	merce 2	lavoro		merce 1	merce 2
(1)	2	-	1	→	5	1
(2)	-	1	1	→	1	3
(3)	1	-	1	→	1	3

I sistemi alla Sraffa possibili sono il sistema I, formato dai metodi (1) e (2) ed il sistema II, formato dai metodi (1) e (3).

Sia p_i^j ($i = 1, 2$; $j = I, II$) il prezzo in termini di salario, della merce i col sistema j . Da facili calcoli si ricava:

$$p_1^I = \frac{1}{5-2r}; p_2^I = \frac{2}{5-2r}; p_1^{II} = \frac{2}{9-5r}; p_2^{II} = \frac{3-r}{9-5r}$$

Sia ρ_j^z ($j = I, II$; $z = 2, 3$) l'extraprofitto, in termini di salario, che si ottiene utilizzando il metodo z ai prezzi del sistema j . Si ricava da facili calcoli che:

$$\rho_I^3 = \frac{1+r}{5-2r}; \rho_{II}^2 = \frac{r^2-1}{9-5r}$$

Pertanto per $0 \leq r \leq 1$ il sistema più profittevole secondo Garegnani esiste ed è il sistema II. Tuttavia, per $1 < r < 9/5$ il sistema più profittevole secondo Garegnani non esiste: se fosse adottato il sistema I converrebbe introdurre il metodo (3) e se fosse adottato il sistema II con-

verrebbe introdurre il metodo (2).

Nota, inoltre, che per $9/5 < r < 5/2$ il sistema più profittevole secondo Garegnani esiste, ma è il sistema II, che in tale intervallo ammette prezzi negativi.

17. Ripresa da Salvadori /14/ appendice B.

Appendice C

In questa appendice mostreremo, con un esempio numerico, che esistono dei casi in cui pur esistendo il sistema più profittevole secondo Garegnani per ogni valore del saggio di profitto per cui esiste un sistema con prezzi tutti positivi, esistono dei valori del saggio di profitto tali che il sistema più profittevole secondo Garegnani ammette qualche prezzo negativo.

Faremo le seguenti assunzioni: (i) l'economia è stazionaria; (ii) esistono due merci per il consumo (1 e 2) che sono sempre consumate nelle proporzioni di tre a cinque; (iii) si conoscono solo tre metodi di produzione che possono essere rappresentati dalla seguente Tabella C.

Tabella C

	merce 1	merce 2	lavoro		merce 1	merce 2
(1)	-	1	1	+	1	1
(2)	5	-	1	+	5	5
(3)	2	-	1	+	4	4

I sistemi alla Sraffa possibili sono il sistema I, formato dai metodi (1) e (2), ed il sistema II, formato dai metodi (1) e (3).

Sia p_i^j ($i = 1, 2$; $j = I, II$) il prezzo, in termini di salario, della merce i col sistema j . Da facili calcoli si ricava:

$$p_1^I = \frac{5+r}{5(1-r^2)} \quad , \quad p_2^I = \frac{1+5r}{5(1-r^2)} \quad , \quad p_1^{II} = \frac{4+r}{4+2r-2r^2} \quad , \quad p_2^{II} = \frac{2r-1}{4+2r-2r^2}$$

Nota che il sistema I ha prezzi tutti positivi per $0 \leq r \leq 1$, mentre il sistema II ha prezzi tutti positivi per $(1/2) < r \leq 2$.

Sia p_j^s ($j = I, II$; $s = 2, 3$) l'extra profitto, in termini di salario che si ottiene utilizzando il metodo s ai prezzi del sistema j . Da facili calcoli si ricava

$$p_1^3 = \frac{9+16r-r^2}{5(1-r^2)} \quad , \quad p_2^3 = \frac{7r^2-12r-9}{4+2r-2r^2}$$

Pertanto il sistema più profittevole secondo Garegnani esiste per $0 \leq r \leq 2$ ed è il sistema II, tuttavia con tale sistema il prezzo della merce 2 è negativo per $0 \leq r < (1/2)$.

Appendice D

A titolo esemplificativo daremo la forma del vettore D in due casi che non è difficile trovare nella letteratura sulla teoria dello sviluppo equilibrato.

caso a: (i) l'investimento è definito dall'ipotesi che l'economia cresce ad un saggio di sviluppo uniforme uguale a g ;

(ii) il consumo è definito da una merce (composita) di consumo e le componenti del vettore c rappresentano le quantità delle singole merci che costituiscono una unità della merce di consumo.

$$D^T = gX^T A + \frac{X^T E + (r-g)X^T AP}{C^T P} C^T = X^T (gA + \frac{1}{C^T P} EC^T + \frac{r-g}{C^T P} APC^T),$$

Infatti $X^T E + (r-g)X^T AP$ è la parte del reddito che non è investita.

caso b: (i) come (i) nel caso a;

(ii) i lavoratori consumano $(1 - s_w)$ del loro reddito mentre i capitalisti consumano $(1 - s_c)$ del loro reddito;

(iii) il consumo dei lavoratori e dei capitalisti è definito da merci di consumo di cui ciascuna unità è costituita da quantità delle singole merci pari alle componenti del vettore c per i lavoratori e del vettore q per i capitalisti;

(iv) i lavoratori percepiscono dai capitalisti un saggio di interesse sul capitale di loro proprietà pari al saggio di profitto r .

$$D^T = gX^T A + \frac{(1-s_w)g}{(g-rs_w)} \frac{X^T E}{C^T P} C^T + \frac{r-g}{Q^T P} (X^T AP - \frac{s_w X^T E}{g-rs_w}) Q^T =$$

$$= X^T \left[gA + \frac{(1-s_w)g}{(g-rs_w)C^T P} EC^T + \frac{r-g}{Q^T P} APC^T - \frac{(r-g)s_w}{(g-rs_w)Q^T P} EQ^T \right]$$

Infatti se né i lavoratori né i capitalisti scompaiono, allora

(cfr. /11/, /7/):

$$s_w \frac{W + rK_w}{K_w} = s_c \frac{rK_c}{K_c} = g. \quad (D.1)$$

in cui $W = X^T E$, K_w è il valore del capitale di proprietà dei lavoratori e K_c è il capitale di proprietà dei capitalisti (ovviamente $K_w + K_c = X^T AP$).

Dalle eq. (D.1) si ricava:

$$r = \frac{g}{s_c} \quad (\text{il teorema di Pasinetti})$$

$$K_w = \frac{s_w}{g-rs_w} W = \frac{s_w}{g-rs_w} X^T E$$

da cui si ricava che il consumo dei lavoratori è pari a

$$\frac{(1-s_w)g}{g-rs_w} X^T E, \text{ mentre il consumo dei capitalisti è pari a } (r-g) (X^T AP - \frac{s_w X^T E}{g-rs_w})$$

Appendice E

Se introduciamo le risorse scarse la Definizione 7.1 e 7.2 e il Teorema 7.1 vanno modificati nel modo che sarà indicato in questa appendice.

Sia $Z = || z_{ik} ||$ una matrice $m \times l$ in cui z_{ik} rappresenta la quantità di risorsa scarsa k utilizzata nel metodo di produzione i . Sia, inoltre, z^* un vettore (colonna) di dimensione l , di cui ciascun elemento z_k^* rappresenta la disponibilità della risorsa scarsa k .

Definizione E.1. Sia s un sottoinsieme dell'insieme $\{1, 2, \dots, m\}$, diremo che s rappresenta un sistema di produzione se per qualche scalare r e per qualche scalare L esistono un vettore x di dimensione m , un vettore p di dimensione n ed un vettore w di dimensione l , tali che:

$$x_i = 0 \text{ se } i \notin s \quad (E.1)$$

$$x^T (B - A) \geq D^T \quad (E.2)$$

$$x^T (B - A) p = D^T p \quad (E.3)$$

$$\alpha(x) \{ [B - (1+r)A] p - Z w \} = \alpha(x) E \quad (E.4)$$

$$(Z^T x - z^*) \leq 0 \quad (E.5)$$

$$(Z^T x - z^*)^T w = 0 \quad (E.6)$$

$$x \geq 0, \quad w \geq 0 \quad (E.7)$$

$$x^T E = L \quad (E.8)$$

Definizione E.2. Sia s un sistema di produzione, diremo che s è un sistema da posizione di lungo periodo al saggio di profitto $\bar{r}$ ed alla quantità di occupazione $\bar{L}$ se i vettori x , p e w che soddisfano le condizioni (E.1)-(E.8) per $r = \bar{r}$ ed $L = \bar{L}$ soddisfano pure le condizioni seguenti.

$$[B - (1+\bar{r})A] p - Z w \leq E \quad (E.9)$$

$$p \geq 0 \quad (E.10)$$

Teorema E.1. Dati m metodi di produzione rappresentati dalle matrici (A, B, Z) , dato il vettore delle disponibilità z^* e dato il vettore delle richieste per l'uso D , esiste un sistema da posizione di lungo periodo al saggio di profitto $\bar{r}$ ed alla quantità di occupazione $\bar{L}$ se e solo se esistono i vettori x , p e w tali che:

$$x^T (B - A) \geq D^T \quad (E.11)$$

$$x^T (B - A) p = D^T p \quad (E.12)$$

$$[B - (1+\bar{r})A] p - Z w \leq E \quad (E.13)$$

$$x^T \{ [B - (1+\bar{r})A] p - Z w \} = x^T E \quad (E.14)$$

$$Z^T x - z^* \leq 0 \quad (E.15)$$

$$(Z^T x - z^*)^T w = 0 \quad (E.16)$$

$$x^T E = \bar{L} \quad (E.17)$$

$$x \geq 0; \quad p \geq 0; \quad w \geq 0. \quad (E.18)$$

Appendice F

In questa appendice vogliamo mostrare un caso in cui il sistema di disequazioni (7.9)-(7.14) non ha soluzioni.

Faremo le seguenti assunzioni: (i) l'economia cresce ad un saggio di sviluppo uniforme pari all'8%; (ii) esistono due merci per il consumo (1 e 2) che sono consumate dai lavoratori nelle proporzioni di tre a cinque, mentre i capitalisti consumano solo la merce 1; (iii) i capitalisti risparmiano il 40% del loro reddito, mentre i lavoratori risparmiano i cinque diciassettesimi del loro reddito complessivo; (iv) si conoscono solo due metodi di produzione che possono essere rappresentati dalla seguente tabella F.1.

Tabella F.1.

	merce 1	merce 2	lavoro		merce 1	merce 2
(1)	5	-	1	+	6	1
(2)	-	10	1	+	3	12

Dalle assunzioni fatte si ricava che ((cfr. appendice D)

$$D^T = \frac{2}{25} X^T A + \frac{8}{3} \frac{X^T E}{C^T P} C^T + \frac{3}{25} (X^T A P - \frac{125}{33} X^T E) \frac{1}{Q^T P} Q^T$$

$$\text{dove } A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si controlla facilmente che per $r = 20\%$ esistono solo due sistemi, il sistema I, formato dal solo metodo 1, ed il sistema II, formato dal solo metodo 2, e che:

$$p_1^I = \frac{25}{9}, \quad p_2^I = 1, \quad p_1^{II} = \frac{1}{3}, \quad p_2^{II} = \frac{91}{45}.$$

dove p_i^j ($i = 1, 2; j = I, II$) è il prezzo in termini di salario della merce i quando è adottato il sistema j .

Tuttavia né il vettore $P^I = (\frac{25}{9}, 1)^T$, né il vettore $P^{II} = (\frac{1}{3}, \frac{91}{45})^T$,

soddisfano le disequazioni (7.6), corrispondenti alle (7.11) per $r = 20\%$.

Riferimenti Bibliografici

- /1/ Baldone S. "Il capitale fisso nello schema teorico di P. Sraffa" *Studi Economici*, 1974, n.1, pp.45-106;
- /2/ Burmeister E. "Synthesizing neo-Austrian and alternative approaches to capital theory: a survey", *The Journal of Economic Literature*, 1974, June.
- /2bis/ Gale D. *The Theory of Linear Economic Models*, New York, Mc Graw Hill, 1960.
- /3/ Garegnani P. "Beni capitali eterogenei, la funzione della produzione e la teoria della distribuzione", in Sylos Labini P. (a cura di) *Prezzi relativi e distribuzione del reddito*, Torino 1973 (precedentemente apparso in inglese, in *Review of Economic Studies*, 1970, pp. 407-36).
- /4/ Garegnani P. "On a change in the notion of equilibrium in recent work on value and distribution: a comment on Samuelson", in Brown M., Sato K. Zarembka P. (a cura di) *Essays in Modern Capital Theory*, North-Holland 1976.
- /5/ Haga H., Otsuki M. "On a Generalized von Neumann model", *International Economic Review*, Vol. VI, 1965 pp. 115-23.
- /6/ Levhari D., "A Non substitution Theorem and Switching of Techniques", *Quarterly Journal of Economics*, vol. 79, 1965 pp.
- /7/ Marrelli M., Salvadori N. "The rate of profit in an expanding economy: some existence, uniqueness and stability conditions", *Australian Economic Papers*, in corso di stampa.
- /8/ Montani G. "Scarce natural resources and income distribution", *Neotoma*, 1975, pp. 68-101.
- /9/ Morishima M. *Theory of Economic Growth*, Clarendon Press, Oxford 1969.
- /10/ Pareto V. *Manuale di economia politica*, Roma, Bizzarri, 1965.
- /11/ Pasinetti L. L. "Rate of profit and income distribution in relation to the rate of economic growth", *Review of Economic Studies*, 1962, pp. 267-79.

- /12/ Quadrio Curzio A. *Rendita e distribuzione in modello economico plurisetoriale*, Milano Giuffrè, 1967.
- /13/ Roncaglia A. *Sraffa e la teoria dei prezzi*, Laterza, Bari, 1975.
- /14/ Salvadori N. "Mutamento dei metodi di produzione e produzione congiunta. Un commento al § 96 di *Produzione di merci a mezzo di merci*", *Studi Economici*, vol. XXXIV, n.7, 1979, pp. 79-94.
- /15/ Schefold B. "Capitale fisso, accumulazione e progresso tecnico", in Pasinetti L. L. (a cura di) *Contributi alla teoria della produzione congiunta*, Il Mulino, Bologna, 1977.
- /16/ Schefold B. "Multiple Product Techniques with Properties of Single Product Systems", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, vol. 38, 1978 N. 1-2, pp. 29-53.
- /17/ Schefold B. "On Counting Equations", *Zeitschrift für Nationalökonomie*, vol. 38, 1978, N. 3-4, pp. 253-285.
- /18/ Steedman I. *Returns to Scale and the Switch in Methods of Production*, Manchester University, mimeografato, 1978.
- /19/ Sraffa P. *Produzione di merci a mezzo di merci*, Einaudi, Torino, 1960.
- /20/ Varri P. "Prezzi, saggio del profitto e durata del capitale fisso nello schema teorico di P. Sraffa", *Studi Economici*, vol. XXIX, 1974, N. 1, pp.5-44.